"The world of mathematics is nothing else but a reflection in our mind of the real world. This makes it clear that every discovery about the world of mathematics gives us some information about the real world."

Alfréd Rényi

Our publication is the result of a two-year-long Comenius bilateral program between Árpád Secondary School in Budapest and Zespol Szkól Rolnicze Centrum Ksztalcenia Ustawiczego in Nysa. Our students worked on some topics on math, the summary of which is included in this book.

Education and Culture
Lifelong learning programme
COMENIUS

„A matematika világa nem más, mint a mi világunk tükörképe gondolkodásunk tükrében, és így a tükörképben felismert igazságok elősegíthetik a létező dolgok világának megismerését."

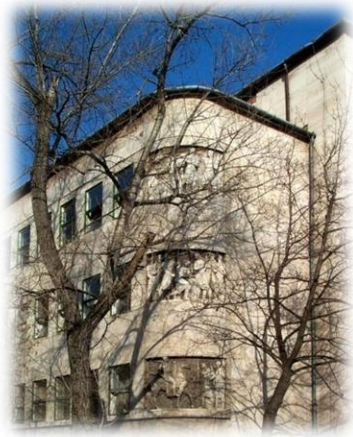
Rényi Alfréd

Kiadványunk a budapesti Árpád Gimnázium és a nysai Zespol Szkól Rolnicze Centrum Ksztalcenia Ustawiczego közöti kétéves Comenius együtt-működés eredményeképpen jött létre. Ennek során diákjaink néhány matematikai témát dolgoztak fel, melyek összefoglalását tartalmazza ez a könyv.

ÁRPÁD GIMNÁZIUM

A több mint 100 éves budapesti Árpád Gimnázium, amelyet a legjobbak között tartanak számon az országban, tudósokat, művészeket, élsportolókat, jól ismert politikusokat, közéleti személyiségeket adott az országnak.

A jelenlegi épülete 1940-ben épült, a kor magyar építészetének jelentős alkotásaként. Az óbudai polgárok nagylelkű támogatása nélkül azonban nem épülhetett volna meg. A gimnázium a III. kerület egy különleges pontján található, ablakai egy római kori amfiteátrum romjaira néznek.



A 600 diák különböző típusú osztályokba jár: hatosztályos speciális nyelvi, speciális matematika, illetve természettudományi tagozatra és négyosztályos nemzetiségi, illetve általános gimnáziumi osztályokba.

A végzős diákok szinte kivétel nélkül továbbtanulnak valamely egyetemen, általában már két állami nyelvvizsga birtokában.

A tanulmányi versenyek fontos szerepet töltenek be az iskolai munkában. A tehetséges és ambiciózus diákok nem csak területi, de országos, sőt nemzetközi versenyeken is részt vesznek szép eredménnyel.

Az iskolánk által rendezett versenyek közül sok éves hagyománnyá vált az Amfiteátrum Kupa. A kerület általános iskolásainak szervezett matematika csapatverseny mindig kiemelkedő eseménye a tanévnek, hiszen előkészítésében, a színes programok lebonyolításában diákjaink nagy számmal vesznek részt.

A gimnázium büszke azokra a diákjaira is, akik különböző sportágakban jeleskednek, mint például vívásban, kajak-kenuban, vízilabdában vagy sakkban. Ők a régi nagy árpádos sportolók nyomdokaiba lépnek.

A kórus azonban egy új vívmány, de nem kevésbé fontos része az iskola életének. Énekkarunk fellép az iskolai rendezvényeken, társadalmi eseményeken, de öregbíti az iskola hírnevét országos versenyeken és fesztiválokon is.

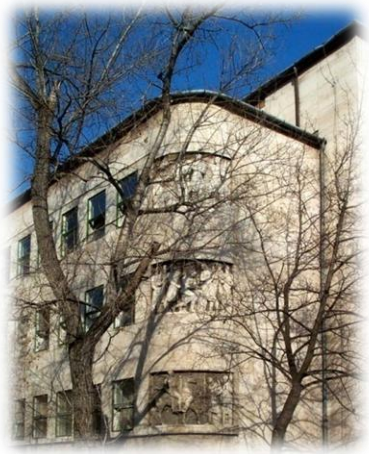
Az iskola legrégebbi nemzetközi cserekapcsolata egy darmstadti középiskolával működik.

A legújabb ilyen jellegű élményünk a Comenius program: A Számok Világa, a Zespol Szkol Rolnicze Centrum Ksztalcenia Ustawiczego nevű lengyel középiskola partnereként. A projektben 2009 ősze óta dolgoznak diákjaink. A nagyon sikeresenek és emlékezetesnek mondható diákcsere programokon túl a két év során szakmai, matematikai munkát is végeztünk.

ÁRPÁD SECONDARY SCHOOL

The more than 100-year-old Árpád Secondary School, which has the reputation of being one of the best in the country, has given scientists, artists, first-class sportsmen and sportswomen, well-known politicians and public figures to Hungary.

The present school-building in Nagyszombat Street was built in 1940, as a significant example of contemporary Hungarian architecture. It couldn't have been finished without the generous help of the citizens of Óbuda (Old Buda). The school is situated in a special part of this district, as it overlooks the ruins of an ancient Roman amphitheatre.



The 600 students go to different types of classes: special language class, special maths class, science class (6-year- study courses) and German culture and history class (4 years).

The students go on to study at university almost without exceptions and by then they have one or two state language exams.

The school competitions are important, the ambitious and talented students take part not only in regional but national or international competitions too with flying colours.

The Amphitheatre Cup, a maths team competition organized by Árpád Secondary for the primary schools in the district, has become a significant school event because a lot of our students are involved in both its preparations and arrangements.

The school is also proud of its students who are successful in different sports from fencing or kajaking to waterpolo or chess. They follow in the footsteps of the great old Árpád sportsmen and sprotswomen.

The choir, however, is a new achievement, but none the less important in the life of the school. Their concerts belong to the school celebrations and also the busy social life of the school and they promote the name of Árpád at national competitions or festivals as well.

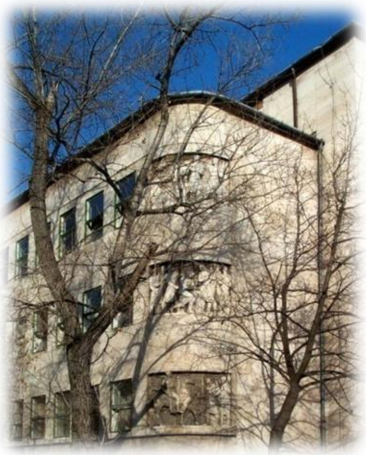
The oldest international relation of the secondary school is an exchange program with a German school, in Darmstadt.

The newest experience of this kind is the Comenius project: The World of Numbers as the partner of Zespol Szkol Rolnicze Centrum Ksztalcenia Ustawiczego. Our students have been working on the project since 2009. Besides the exchange programmes which we think were successful and memorable, we have been doing academic work, we have been working on math topics as well.

SZKOŁA ŚREDNIA ÁRPÁD

Działająca od ponad 100 lat szkoła średnia Árpád z Budapesztu cieszy się reputacją jednej z najlepszych szkół w kraju. Jej mury opuściło wielu znanych węgierskich naukowców, artystów, sportowców, polityków i innych postaci z życia publicznego.

Budynek, w którym szkoła mieści się obecnie, pochodzi z 1940 roku i jest typowym przykładem współczesnej węgierskiej architektury. Do ukończenia jego budowy znacząco przyczynili się mieszkańcy dzielnicy, w której jest położony, czyli Óbudy. Miejsce, w którym stoi budynek jest miejscem szczególnym, ze względu na sąsiedztwo ruin starożytnego rzymskiego amfiteatru.



600 uczniów uczących się w szkole Arpad uczęszcza do różnych typów klas: klasy językowej (cykl kształcenia trwa 6 lat), klasy matematycznej, klasy nauk ścisłych oraz klasy specjalizującej się w kulturze i historii Niemiec (cykl kształcenia 4 letni).

Prawie bez wyjątków wszyscy absolwenci kontynuują edukację na uniwersytetach, a kończąc szkołę mają zazwyczaj za sobą jeden lub dwa egzaminu państwowe z języków obcych.

Istotną rolę w kształceniu młodzieży odgrywają różnego rodzaju konkursy, a szczególnie ambitni i utalentowani uczniowie świetnie radzą sobie na poziomie nie tylko szkolnym, ale i ogólnokrajowym , a nawet międzynarodowym.

Tak zwany *AmphitheatreCup*, konkurs matematyczny organizowany przez szkołę Árpáddla uczniów szkół podstawowych, stał się istotnym wydarzeniem w życiu szkoły. Wielu uczniów jest zaangażowanych nie tylko w przygotowania, ale również przeprowadzenie konkursu.

Szkoła szczyci się ponadto osiągnięciami sportowymi swoich podopiecznych, w takich dyscyplinach sportu jak szermierka, kajakarstwo, ale też szachy i piłka wodna. Idą oni w ślady wielkich sportowców, którzy rozpoczynali swoje kariery w szkoleÁrpád.

Nowym, ale niemniej ważnym przedsięwzięciem jest chór szkolny. Ich koncertów można posłuchać podczas uroczystości szkolnych. Promują także dobre imię szkoły na konkursach i festiwalach rangi ogólnokrajowej.

Najstarszym programem wymiany młodzieży jest współpraca ze szkołą niemiecką z miejscowościDarmstadt.

Ostatnim przedsięwzięciem tego typu jest projekt *Świat Liczb*, programu *Uczenie się przez całe życie, Comenius*, w ramach którego szkoła współpracuje z Zespołem Szkół Rolniczych w Nysie (Polska). Projekt trwa od roku 2009. Poza wymianą młodzieży pracujemy nad zagadnieniami z dziedziny matematyki.

ZESPÓŁ SZKÓŁ ROLNICZYCH W NYSIE

Zespół Szkół Rolniczych to szkoła o prawie 60 – letniej tradycji, pięknie położona na przedmieściach Nysy, w budynku pochodzącym z końca XIX wieku, dawniej należącym do zakonu Misjonarzy Słowa Bożego. Wokół budynku szkoły znajdują się zadbany park, ogrody i duże boisko sportowe. Wszystko to stwarza unikalną atmosferę tego miejsca.

W „Rolniku", jak potocznie określa się Zespół Szkół Rolniczych, uczy się młodzież w wieku od 16 do 19 lat. Zapewniamy również możliwość kształcenia dorosłym, w szkołach policealnych i zaocznym Liceum Ogólnokształcącym.

W szkole mamy ponad 1000 uczniów i słuchaczy uczących się w takich typach szkół jak Technikum Weterynaryjne, Technikum Rolnicze, Technikum Technologii Żywności, czy Technikum Informatyczne. Ponadto w klasach Liceum Ogólnokształcącego młodzież uczy się w klasach o profilach matematyczno - informatycznym, językowym, turystycznym, menadżerskim, humanistycznym, dziennikarskim i biologiczno – chemicznym.

Uczniowie naszego Zespołu Szkół osiągają bardzo dobre wyniki w egzaminach zewnętrznych, z powodzeniem startują również w konkursach i olimpiadach przedmiotowych, z poziomem ogólnopolskim włącznie. Od kilu lat zajmujemy czołowe miejsce w rywalizacji o tytuł najbardziej usportowionej szkoły Opolszczyzny.

Wiele przedsięwzięć organizowanych przez naszych uczniów i nauczycieli można określić mianem wizytówki naszej szkoły. Są to takie wydarzenia jak coroczny koncert charytatywny *Zatrzymajcie się ludzie na chwilę*, konferencje naukowe przedmiotów zawodowych (*Konferencja Rolnicza*, czy *Weterynaryjna*), konkurs matematyczny *Kwadrans przed maturą*. To przykłady tylko kilku z nich.

Nieodzownym elementem życia naszej szkoły są różnego typu projekty. Na przykład projekty edukacyjne dające uczniom możliwość uczestniczenia w dodatkowych zajęciach wyrównawczych, czy kołach zainteresowań. Od 8 lat współpracujemy ze szkołą partnerską z Oberhausen w Niemczech. 6 lat temu rozpoczęliśmy naszą przygodę z programem *Uczenie się przez całe życie, Comenius*, w ramach którego współpracowaliśmy ze szkołami z takich państw jak Rumunia, Francja, Hiszpania, Turcja, Czechy, a ostatnio Węgry.

Podsumowując, 'Rolnik' to mieszcząca się w wyjątkowym, zabytkowym budynku nowoczesna instytucja, patrząca z optymizmem w przyszłość, szczycąca się osiągnięciami swoich uczniów i nauczycieli, której siłą jest inicjatywa i kreatywność obu tych grup.

ZESPÓŁ SZKÓŁ ROLNICZYCH

Zespół Szkół Rolniczych is a school with almost 60-year-long tradition.It is beautifully located in the suburbs of Nysa, in an impressive building dating back to the XIXth century, which formerly belonged to the Missionaries of the Divine Word. It is surrounded by the park, football ground and gardens. The complete area is fenced with a brick wall and it all adds to the unique atmosphere of the place.

“Rolnik”, as school is informally referred to, provides secondary education for students of the age from 16 to 19. There are also classes for adults, both in comprehensive and vocational form.

Altogether we have over 1000 students learning in different types of classes: technical classes for veterinary, food processing, agricultural and IT technicians. There are also classes providing general education, which specialize in different subjects (e.g. maths and computer studies, biology and chemistry, biology and geography, foreign languages and others).

The students of our school get excellent results in external exams, they also compete successfully in many tests and competitions, from regional to national level. In the last few years we continuously get the prize for the most ‘sporty’ school in Opole Province.

There are events which have become characteristic symbols of our school: annual charity concert “Stop, people, for a moment…,” vocational conferences for agriculture or veterinary doctors, math competition called “A quarter till the final exam,” and many others.

Indispensible elements of our school life are various projects we have participated in. There are educational projects providing extra lessons and after-school activities for students. For 8 years we have been cooperating with our partner school from Oberhausen, Germany. 6 years ago we started the adventure with Comenius projects – so far we have worked together with schools from such countries as Romania, France, Spain, Turkey, Czech Republic and recently Hungary.

All in all, “Rolnik,” is a modern school located in a monumental building, facing the future with extreme optimism, proud of the achievements of its students and teachers and strong with the initiative and creativeness of both.

ZESPÓŁ SZKÓŁ ROLNICZYCH

A Zespol Szkól Rolniczych egy majdnem 60 éves hagyománnyal rendelkező iskola. Nysa szép kertvárosában található egy 19. századi pompás épületben, amely korábban az Isteni Ige Társasága tulajdonában volt. Az épület egy park, egy futballpálya és egy kert közepén áll. Az iskola egész területét kőfal veszi körül, amely fokozza a hely különleges hangulatát.

A "Rolnik", ahogyan nem hivatalosan utalnak az iskolára, 16 és 19 év közötti diákok középszíntű képzését látja el. Ezen kívül felnöttképzés is folyik itt, mind gimnáziumi, mind szakközépiskolai.

Az iskolának összesen több, min 1000 diákja van, akik különböző típusú képzésben részesülnek: állatorvosi, élelmiszeripari, mezőgazdasági és informatikai szakképzés. Vannak általános gimnáziumi osztályok, amelyek különböző szaktárgyakra specializáltak (pl. matematika, számítástechnika, biológia és kémia, biológia és földrajz, idegen nyelvek és így tovább.)

Az iskola diákjai kitűnő eredménnyel szerepelnek különböző vizsgákon, területi és országos versenyken. Az elmúlt években az iskola folyamatosan elnyerte az Opole Megye 'legsportosabb iskolája' címet.

Iskolánk meghatározó jellegű eseményei: az 'Emberek, álljatok meg egy percre….' című, évente megrendezésre kerülő jótékonysági koncert, a mezőgazdasági és állatorvosi szakképzők konferenciája, 'Negyedévvel az érettségi előtt' nevű matematika verseny és még sok más.

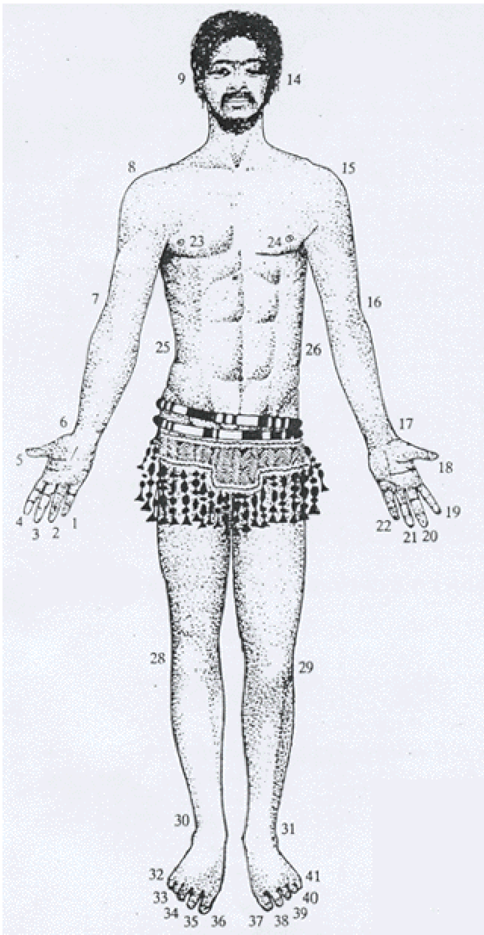
Az iskola életétől elválaszthatatlanok a különböző projektek. Vannak oktatási projektek, amelyek több tanórat vagy iskolán kívüli tevékenységeket jelentenek diákjainknak. Nyolc éve működik együtt az iskola a németországi, oberhauseni partnerével. Az első Comenius project hat éve indult el, és az iskola eddig olyan országokkal működött együtt, mint Románia, Franciaország, Spanyolország, Törökország, Cseh Köztársaság és mostanában Magyarország.

Összegezve, a "Rolnik" egy hatalmas épületben működő modern iskola, amely határtalan optimizmussal néz a jövőbe, büszke diákjai és tanárai eredményire és az ő kezdeményező képességük és kreativitásuk teszik erőssé.

ŐSKORI MATEMATIKA

Manapság a számolás már napi rutin. A számok különböző módon jelennek meg, és különböző célokra használjuk őket. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek sokféleképpen kombinálhatók.

Feltételezhetően, az őskori ember csak olyan szavakat használhatott, mint az „egy” „kettő” vagy „sok” különböző kombinációkban. Például úgy magyarázták el az ötöt hogy „kettő, kettő, egy”. Ahhoz, hogy 6-nál többet fejezzenek ki, azt kellet mondaniuk, hogy „sok”. Egyes tárgyakat csoportokba sorolva különböztettek meg, például az állatokat a legelőn. Így az emberek meg tudták számolni a dolgaikat függetlenül a dolgok típusától. Első segédeszközként az egyik kezüknek, majd mindkét kezüknek az ujjait használták. Idővel szükségük volt arra, hogy a számokat feljegyezzék. Eleinte csak egyszerű számításokat végeztek különböző rovátkákkal. Képzeljük el, hogy egy ókori pásztornak meg kellett számolnia 88 bárányt. Egy barlang bejáratánál ült néhány csonttal és egy darab kővel. Amikor egy bárány elhagyta a legelőt, akkor a pásztor valószínűleg vésett egy újabb rovátkát a sziklába. Aztán leellenőrizte, hány metszés van a sziklában és így könnyen megtudhatta, mennyi bárány ment haza. A számolás egy másik módja az, amikor az ember egy bizonyos testrészét megérinti, mint ahogy a képen is látható. A következőképpen is lehetett számolni, mégpedig csoportosítással, például öt bot képzett egy köteget, ami aztán halomba rendezve áll. Ez volt az elődje a mai tucat fogalmának.

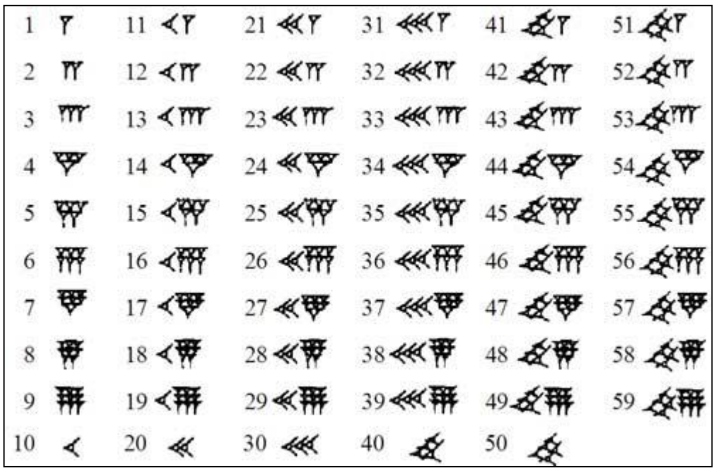


Azt a képességet, hogy immár tudtak számolni, különböző dolgok megmérésére használták fel. A tárgyak hosszát (kiterjedését) az emberi test különböző részéivel mérték, (úgymint; hüvelyk, láb, könyök), míg az űrtartalmat ahhoz az edényhez hasonlították, amiben az anyagot tartották. A távolságot lábban, vagy barázdában mérték. Idővel ezek a mértékek egységesültek, hiszen minden embernek mások voltak a méretei, és ez jelentős különbségeket okozott.

A számolás, mérés szükségessége végigkísérte az emberiség történetét. Ma már nem tudjuk elképzelni az életet a számok ismerete nélkül. Éppen ezért éri meg figyelmünket az írott történelem előtti emberekre fordítani, akiknek e nélkül kellett boldogulniuk. Ők bebizonyították leleményességüket a számolás területén. Nekik köszönhetjük, hogy primitív módszereikből kifejlődött az a matematika, amit ma ismerünk. Ők nem vették észre, micsoda hihetetlen felfedezést tettek, és hogy ennek később milyen hatása volt a világra, és az elkövetkező generációkra. Nyugodtan hívhatjuk őket zseniknek – olyasvalamit alkottak, ami számunkra olyan természetes, mintha mindig is létezett volna.

MEZOPOTÁMIA MATEMATIKÁJA

Sokat tudunk az ókori Mezopotámia matematikájáról, hiszen számos ékírásos égetett agyagtábla fennmaradt abból a korszakból, köszönhetően száraz éghajlatának. Számos történész úgy gondolja, hogy az ősi világ matematikája Mezopotámiából terjedt el. A mezopotámiaiak egyikei voltak annak a négy kultúrának, akik kifejlesztették a helyiérték-használatot (együtt Kínával, Indiával és a majákkal). Van azonban egy alapvető különbség a modern és az ő helyiértékes rendszerük között: a mezopotámiaiak nem használtak nullát (a „0”-t, mint szimbólumot valószínűleg Indiában vagy Indokínában találták ki a 7. században).



Még a nulla nélkül is, a mezopotámiai helyiérték-rendszernek rengeteg előnye volt, többek között tudtak algoritmusokat használni az alapvető aritmetikai műveletekhez. Továbbá a mezopotámiaiak terjesztették ki az értékeket egynél kisebbekre is, mint ahogy mi tesszük a tizedes törtekkel. Ezenkívül kifejlesztettek egy praktikus módszert a négyzetgyök kiszámítására, amit még ma is tanítanak az Egyesül Államok általános- és középiskoláiban, de manapság már ezeket az értékeket számológépekkel számolják. Továbbá képesek voltak megoldani bizonyos negyedfokú, és harmadfokú egyenleteteket is.

Korábban sokan úgy gondolták, hogy a mezopotámiaiak jók voltak algebrában, de gyengék geometriában. Később történészek felfedezték, hogy ismerték a Pitagorasz- és Thalész-tételeket (valószínűleg Püthagorasz és Thalész járt Mezopotámiában, s talán itt ismerték meg a híres tételeket, melyeket később róluk neveztek el).

A mezopotámiai geometria kritikája valószínűleg akkor kezdődött el, amikor néhány forrás szerint az derült ki, hogy ők a π értékét 3-nak vették. Később felfedezték, hogy legalább néhányan a π-nek az értékét 3,125-tel számolták, ami ugyan olyan jó közelítő érték, mint amit a korabeli egyiptomiak használtak.

EGYIPTOMI MATEMATIKA

Az egyiptomi matematika alatt azt a matematikát értjük, melyet óegyiptomi nyelven írtak. A hellenisztikus korban az egyiptomi nyelvet a görög váltotta fel az egyiptomi tudósok körében, ezért ettől kezdve az egyiptomi, a babiloni és a görög matematika egyesült és belőlük alakult ki a hellenisztikus matematika. A matematika tudományának művelését Egyiptomban később az arabok folyatatták a muzulmán matematika részeként, ekkor az arab lett az egyiptomi tudósok nyelve.

SZÁMÍRÁS

Az ókori egyiptomiak számírását 4000 éves papiruszleletekről ismerjük. Ez egy könnyen érthető, egyszerű rendszer. 10-es számrendszerben, de helyiérték nélkül számoltak. Külön jele volt az egyesnek, a tízesnek, a százasnak és az ezresnek. Ezekből állították össze a számokat, de ők tőlünk eltérően jobbról balra írtak. Persze ennek az egyszerűségnek ára van, hiszen adott esetben nagyon hosszú számok adódhattak, s ezt bizony nehéz kiolvasni.

1		tollvonás
10		kengyel, béklyó
100		kötéltekercs
1 000		lótusz
10 000		középső ujj
100 000		ebihal
1 000 000		a végtelen istene

Például:  = 2213

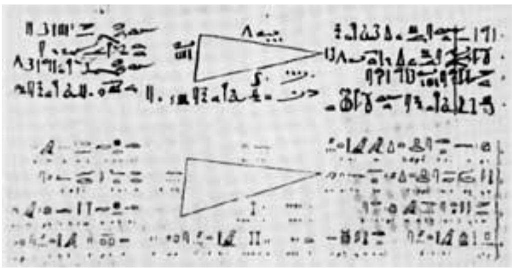
Források: Az egyiptomi tekercsek

A máig felfedezett legrégebbi matematikai szöveg – a Moszkvai papirusz – egy óegyiptomi (középbirodalomból származó i. e. 2000 – i. e. 1800) papirusz. Ezt a papiruszt a moszkvai Puskin Szépművészeti Múzeumban őrzik. Ez a papirusz kb. egyidős a Rhind-papirusszal.

A legtöbb ókori matematikai szöveghez hasonlóan „szöveges feladatokat” tartalmaz, melyeket látszólag szórakoztatási céljából írtak.

Az egyik feladatot különösen nagy jelentőségűnek tartják, mivel megad egy módszert a csonka testek térfogatának számítására.

A Rhind-papirusz (i. e. 1650) mely egy másik fontos óegyiptomi matematikai szöveg, egy útmutató kézikönyv az aritmetikához és a geometriához. Az egyiptomi Ahmesz írnok által összeállított számtan és mértankönyv. Az irat skót felfedezőjéről Rhind-féle papirusz néven vált ismerté. Ebben Ahmesz többek között leírja, hogy hogyan lehet kiszámítani egy trapéz alakú (levágott csúcsú háromszög) szántóföld területét, egy gúla térfogatát. Találhatók rajta törtek, számtani és mértani haladványok, valamint elsőfokú egyismeretlenes egyenletekk. Ezt a dokumentumot ma Londonban őrzik.



A területképletek, szorzási, osztási módszerek és törtműveletek ismertetésén kívül még más ismeretek meglétére is bizonyítékul szolgál, többek között az összetett számok, a prímszámok ismeretére, valamint a számtani, a geometriai és a harmonikus közép számítására. Egyszerűsítve leírja Eratoszthenész szitáját és a tökéletes szám elméletét is (nevezetesen a 6-ét). Azt is megmutatja, hogyan oldhatunk meg lineáris egyenleteket, hogyan számíthatunk ki számtani és mértani sorozatokat.

A Rhind-papiruszon szereplő három mértani alakzat arra utal, hogy ismertek volt számukra az analitikus geometria alapelvei:

- hogy határozzuk meg a π értékét egy százalékon belüli hibahatárral
- a kör négyzetesítésére való korai próbálkozás
- a kotangens legkorábbi használata

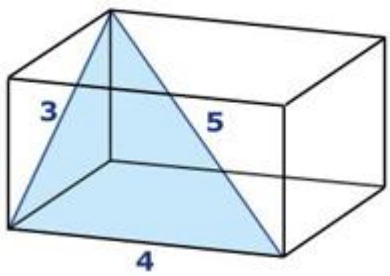
A henger, mint gabonatartály is feltűnik a Rhind-papiruszon. Ez azt is mutatja, hogy a körhenger, kocka és a téglatest térfogatát ki tudták számítani. A kör területét a $t = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ képlettel számolták, ahol „d” a kör átmérőjét jelöli. Itt tehát a π helyett a 256/81 = 3,1605 számmal dolgoztak. Ez közel van a π tényleges értékéhez.

A papiruszon találunk ugyan 3, 4 és 5 egység oldalú háromszöget, de semmi jele annak, hogy kimondták volna rá, hogy derékszögű a háromszög, azaz a Pitagorasz-tételt. Ez a papirusz mindenesetre bizonyítja az egyiptomi matematika fejlettségét. Nem véletlenül hatott a görög matematikusokra, elsősorban Thalészra és Püthagoraszra.

Végül a Berlini papirusz (i. e. 1300) azt bizonyítja, hogy az ókori egyiptomiak számára ismert volt a másodrendű algebrai egyenletek megoldása is.

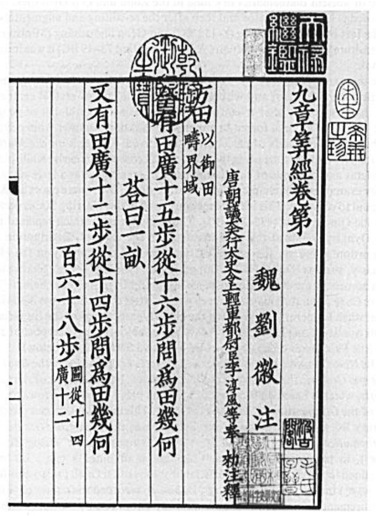
MÁS ÉRDEKESSÉG

A Kheopsz-piramis szerkezetében fellelhető az ún. aranymetszés aránya. Ezen piramis ún. királyszobájának méreteiben az ismert pitagoraszi számhármas a 3, 4, 5 fedezhető fel.



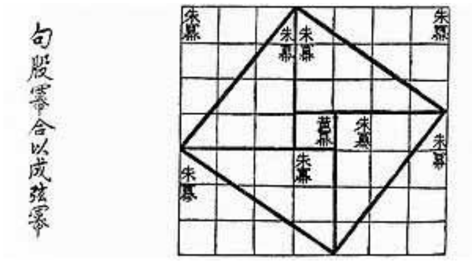
AZ ŐSI KÍNAI MATEMATIKA

Az ősi kínai matematika nem nagyon ismert, mivel i. e. 212-ben a kínai uralkodó Qin Shi Huang elrendelte minden könyv elégetését. Csak kevés információ maradt meg erről a tárgyról, azokból a könyvekből melyeket a parancs ellenére nem égettek el.


九章筭經卷第一
魏 劉徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步

A legrégebbi dokumentum egy matematikai ismereteket összefoglaló kivonat: "Matematika Kilenc Könyve". Különböző korszakok embereinek munkáit tartalmazta. 246 munka volt benne összegyűjtve, mind ugyanazon módon előadva: először a probléma megfogalmazásával találkozunk, majd a válasz és végül a megoldás. Például az egyik könyv tartalmaz egy leírást a „fang-czeng" módszerről, amely megmutatja, hogy kell megoldani *n* egyenletből álló *n* ismeretlenes egyenletrendszert. Ez hasonló a manapság Cramer-szabályként ismert determinánsos eljáráshoz. A fang-czeng kifejezés jelentése: a számokat dobozokba rakni. Ez a kifejezés abból a tényből származik, hogy az ősi Kínában az algebrai számításokat négyzetrácsos matematikai táblán végezték.

Zhoubi suanjing" a legrégebbi (teljes) kínai szöveg, amely a matematikára vonatkozik. Az i. e.100 és az i.sz. 100. év közötti időszakra tekint vissza. A szöveg tartalmazza a Gougo-alapelveket, a Pitagorasz-tétel itt került megismétlésre. Közös nevezőre hozott törtekkel való számolások részletes leírását is megtalálhatjuk itt.



Egy másik könyv a legrégebbről ismertek közül az „Értekezés a Mérőpálcáról". Ez leginkább az asztronómiával kapcsolatos, de a Pitagorasz-tétel is megtalálható benne. Nem tudjuk azonban, hogy a kínaiak maguk jöttek erre rá, vagy az országon kívülről szerezték az ismeretet.

Mo Jing című könyv szintén elkerülte az elégetést. Az i. e. 330-as években, Micius filozófus követői írták. A geometriára hivatkozott és számos nézőpontból világított rá a különböző matematikai és fizikai módszerekre.

A i. e. 4. sz.-ban a számolópálca vált népszerűvé. Ezek tízeshez hasonló jelölésrendszeren alapultak. A rejtvények, fejtörők, varázsnégyzetek széles körben elterjedtek voltak akkoriban.

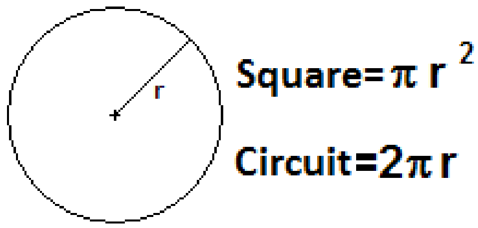
A kínaiak egyik legjelentősebb eredménye a napjainkban általánosan elterjedt tízes számrendszer volt. Ez a Shang korra nyúlik vissza (i.e.1600 – i.e.1046.). A legkorábban felfedezett tárgy, ami ehhez kapcsolódik egy teknőspáncél melyre az 123 számok voltak írva. A belevésett figurák így álnak: 1- utána a százasok jele; 2- majd a tízesek jele; 3- végül az egyesek jele. Akkoriban ez volt a legelőrehaladottabb számrendszer.

Később Kínában a matematikai ismeretek fejlődésének köszönhetően feltűnt egy suanpan nevű eszköz. Ez olyasmi volt, mint egy számológép. A vízszintesen elhelyezkedő zsinórok két részre voltak osztva: elsőben 5 golyó, a másodikban 3. A második részben elhelyezkedő golyók értéke megegyezett 5 az elsőben elhelyezkedő golyó értékével. Ez az eszköz segített gyorsan elvégezi minden matematikai műveletet, úgymint összeadás, kivonás, osztás, szorzás, négyzet és köbgyökvonás.

A negatív számok bevezetése szintén nagy felfedezése a kínaiaknak. Annak érdekében, hogy megkülönböztessék őket a pozitív számoktól színeket használtak – feketét (negatív) és pirosat (pozitív). Továbbá különböző neveik voltak. Az egyiket „fu”-nak még a másikat „czeng”-nek hívták (innen származik a már említett fu-czeng módszer neve).

A törteket még a negatív számoknál is előbb fedezték fel. Ők használták az 1/2-et (felet), az 1/3-ot (kicsi felet) és 2/3-ot (nagy felet).

Egy másik eredménye volt Liu Hui 3. századi kínai tudósnak a π szám. Az értéke szerinte 3,14159 volt. A i.sz. 5. században Zu Chongzhi és fia Zu Gengzhi pontosította a π értékét tíz tizedes jegyig, azaz: 3,1415929203-ra.



Kr. u. 1100 körül az ókori Kínában megjelent egy tétel a háromszög alakban előforduló számokkal kapcsolatban. 1303-ban a kínai matematikus, Zhu Shijie írt egy könyvet „A négy elem értékes tükre” címmel (az eredeti címe: „Szu - Yu Yu - chien” volt). Ez volt a kínai algebra legnagyobb eredménye. Feljegyeztek olyan numerikus módszereket, amivel meg tudtak oldani (közelítőleg) akár 14. fokú egyenleteket is (ma ez az eljárás Horner-eljárásként ismert), Továbbá a fent említett „háromszögtételt”, amely Európában csak a 17. században jelent meg Blaise Pascalnak köszönhetően, s ma Pascal-háromszögnek nevezzük.

A kínai matematikusok különböző algebrai átalakításokat és geometriai transzformációkat is használtak. Képesek voltak megoldani másodfokú egyenleteket, kiszámolni osztási maradékot, továbbá egyszerű alakzatok területét (pl. téglalap, háromszög, kör, a trapéz, a kör részei feltételezve, hogy a π = 3). A helyi értékeshez hasonló számolási rendszert használtak, de nem használták a 0--t. Helyette egyszerűen üresen hagyták a helyét.

A szorzótábla különlegességnek számított, mert a vizsgákon énekelni és nem mondani kellett azt (a köztisztviselő jelölteknek le kellett tenniük a vizsgát). Valószínűleg innen származik a mondás: „Átment az éneklésen”.

AZ ÓKORI GÖRÖGÖK MATEMATIKÁJA

(i. e. 550 – i. sz. 300)

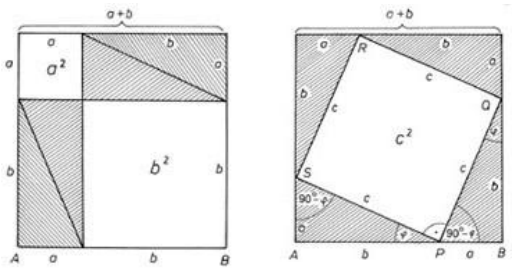
A görög és hellén matematika képviselői elszórva éltek a Földközi-tenger térségének keleti részén, mégis egy egységnek tekintendők. Hellenisztikus matematikusoknak a kései görög matematikusokat nevezik.

Sokkalta kifinomultabb matematikát hoztak létre a deduktív érvelési módszer alkalmazásának bevezetésével, mint előttük bárki más. Az őket megelőző kultúrákkal szemben nem ismételt megfigyelések alapján állítottak fel szabályokat, hanem a logika segítségével vezették le a következtetéseket a definíciókból és az axiómákból.

PÜTHAGORASZ, „A SZÁMOK ATYJA" (I.E. 582 – 496)

Ión származású matematikus, csillagász, filozófus, zenetudós. A püthagoreus filozófiai iskola megalapítója Krotonban. Ott már-már isteni tiszteletben tartották, úgy vélték, hogy „a létező lények között vannak istenek, vannak emberek, és vannak olyan lények, mint Püthagorasz." Munkáját nehéz elválasztani tanítványaiétól, velük együtt fedezte fel a rezonancia alaptörvényét, miszerint a hang magassága a rezgő húr hosszának függvénye. Az ő nevét viselő Pitagorasz-tétel ezzel szemben feltehetően nem az ő találmányuk, sőt lehetséges, hogy nem is ők bizonyították először, de a görögök közt ők alkalmazták elsőként, és a tétel kidolgozása az ő nevükhöz fűződik.

A tétel legszemléletesebb bizonyítása síkidomok átdarabolásán alapul: a két négyzetben 4-4 egybevágó derékszögű háromszöget helyeztünk el. Ekkor a fennmaradó terület a jobb oldali ábrán az átfogó négyzetével, a bal oldalin pedig a befogók négyzetösszegével egyenlő.



THALÉSZ (I. E. 624-546)

Kis-ázsiai származású matematikus, filozófus és csillagász. Az első görög matematikus, akinek neve fennmaradt. Beutazta az akkor ismert művelt világot és politikai tanácsadóként is dolgozott, megalapította a milétoszi iskolát. Írásos műve nem maradt fenn, munkásságát mások leírásán keresztül ismerjük. A matematikába bevezette a szögek fogalmát, megfogalmazta a róla elnevezett Thalész-tételt és a párhuzamos szelők tételét.

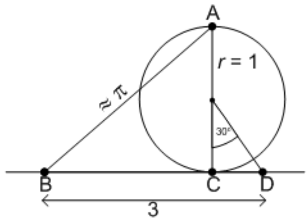
ARKHIMÉDÉSZ (I. E. 287-212)

Szicíliai matematikus, fizikus, csillagász, filozófus. A valaha élt legnagyobb matematikusok egyike. Élete utolsó szakaszát rokona, a szirakuzai fejedelem udvarában töltötte, hasznos szolgálatokat tett neki. A város elestekor hunyt el, a nevezetes idézet elhangzását követően szúrta le egy dühös római katona: „Ne zavard a köreimet!" Az őt körbevevő civilizáció fogyatékosságai ellenére, ahol a tízezer már végtelent jelentett, ő 10^{64}-ig le tudta írni a számokat. Kezdetleges integrálszámításokat is végzett, de azok pontossága ismeretlen. π értékét 22/7-el közelítette, amit még a középkorban is általánosan használtak. A henger, a beleírt gömb és kúp térfogatainak arányának tisztázására $(3:2:1)$ olyan büszke volt, hogy ezt az ábrát vésette a sírkövére.

A NÉGY NEVEZETES ÓKORI GEOMETRIAI SZERKESZTÉSI PROBLÉMA:

1. A KÖR NÉGYSZÖGESÍTÉSE

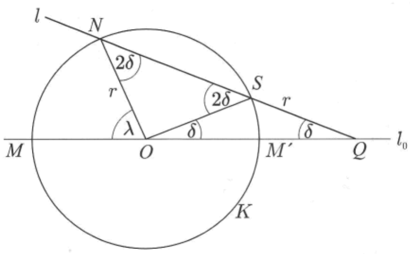
Lényege adott kör területével egyenlő területű négyzet szerkesztése, azaz $\sqrt{\pi}$ oldalhosszúságú négyzet megszerkesztése. A matematika egyik legnépszerűbb problémája volt, habár euklideszi geometriával megoldhatatlan. Ezt már a görögök is sejtették, de csak 1882-ben tudta bizonyítani Ferdinand von Lindemann. Szerkesztés π értékének megközelítésére:



$$AB = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \approx 3.14153\ldots$$

2. SZÖGHARMADOLÁS

A görögök ennek is sejtették megoldhatatlanságát, de nem sikerült azt bizonyítani az újkorig. Azok a szerkesztési feladatok, amelyek analitikusan irreducibilis harmadfokú egyenlethez vezetnek, nem oldhatók meg euklideszi szerkesztéssel. A szögharmadolás ilyen, ugyanis az $x^3 - 3x - 2\cos\alpha = 0$ egyenlet valós gyökét kellene megszerkeszteni, ahol $2\cos\frac{\alpha}{3}$ ismeretlenre. Vannak azonban olyan szögek, melyeket egyenletbe helyettesítve van racionális gyök, és ekkor a szerkesztés is elvégezhető. Például: $\alpha = \pi$ esetén az egyenlet: $x^3 - 3x + 2 = 0$, ennek valós gyöke $x = 1$, tehát a $\beta = \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{3} = 60°$ szerkeszthető.



$\sphericalangle MON = \lambda, SQ = OM \Rightarrow \sphericalangle SQO = \frac{\lambda}{3}$

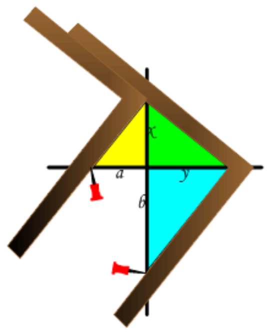
Az általános megoldás csak nem-euklideszi- szerkesztéssel lehetséges:

3. SZABÁLYOS HÉTSZÖG SZERKESZTÉSE

Euklideszi geometriával lehetetlen megoldani, és csak 1975-ben talált rá Johnson nem-euklideszi módszert, az úgynevezett Neusis-módszert.

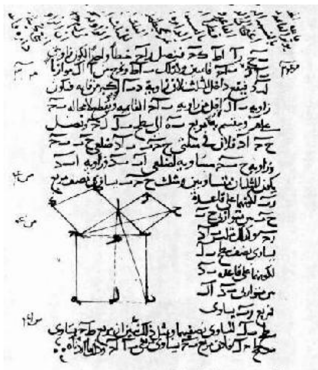
4. KOCKAKETTŐZÉS

Eszerint egy olyan kocka élét kellene megszerkeszteni, amelynek térfogata kétszerese egy adott kocka térfogatának. A monda szerint a délosziaknak Apollón templomának oltárát kellett volna megkettőzniük, hogy az istenek elűzzék a pestist. Az adott kocka oldalát egységnyinek választva a feladat az $x^3 - 2 = 0$ harmadfokú egyenlet pozitív valós gyökének, az $x = \sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakasznak a megszerkesztése, mely euklidészi szerkesztéssel nem lehetséges. Arkhimédész szerkesztésében az a és b szakaszokat egy merőleges egyenes párra mérte fel, majd két, egymáson csúsztatott és a felmért szakaszok végpontjába szúrt szegekhez támasztott derékszögű vonalzóval a két derékszöget a merőleges egyenesekhez igazította. Ekkor $a : x = x : y = y : b$.



Az arab matematika

Az arab matematika korszakai



An early Arabic translation of the Pythagorean theorum.

Görög, egyiptomi, mezopotámiai és indiai hagyományok összegyűjtése és azok arabra fordítása igénybe vette a 8. századot, az Abbászida-kort. A bagdadi tudomány házában könyvtár, csillagvizsgáló ált a kutatók rendelkezésére. Az Ibér félszigeten Cordoba a tudományos központ.

A 9. században megkezdődött a lefordított művek kommentálása egyben azok alapján sajátos arab színezetű fejlődés indult meg. A kor kiemelkedő matematikusai: Al-Hvárizmi, Al-Kindi, Szábit Ibn, Kurra, Al-Mahani. Fejlődik az aritmetika, a geometria, a trigonometria, az algebra és a közelítő számítások módszere.

A 10-12. században a csillagászattal összefüggésben az érdeklődés a trigonometriára és a közelítő számítások felé fordul. De tovább fejlődik az algebra is. Korszakot fémjelző matematikusok: Abul-Vafa, Al-Karadzsi, Al-Brúni, Omar Hajjám, Abu-Kámil és Al-Battáni.

13-15. században erős kínai hatás alatt főleg numerikus módszerek kerültek előtérbe. Az ekkor kiváló matematikusok: At-Túszí, Al-karhi, Al-magribi, Ibn Al-Haiszan, Al Kalaszádi.

A legfontosabb matematikusok

Al-Battáni

A csillagászat keretében művelte a trigonometriát. A mai Törökország déli részén fekvő Harránban (Mezopotámia Battanban) született, és a mai Irak területén lévő Szamarra mellett halt meg. A csillagimádó szabeusok szektájába tartozott. Csillagászati megfigyeléseit Antiokhiában és Araktában végezte. Egy csillagászati könyve maradt meg, a csillagok mozgásáról.

Az ő érdeme, hogy a görög szinusz fogalom (középponti szöghöz tartozó húr) és a hindu szinusz fogalom (egy középponti szöghöz kétszer akkora középponti szög húrjának a fele tartozik) versengésbe a hindu felfogás győzött. Már Szábit Ibn Kurra is használta a hindu változatot, mégis az Európába való közvetítő érdeme Al-Battánié. Annak ellenére, hogy már ismerte a többi szögfüggvényt is, könyvében mégis a szinusz segítségével elég bonyolultan fejezi ki a derékszögű háromszög egyik befogóját:

$$b = \frac{a \cdot \sin(90 - \alpha)}{\sin \alpha}$$

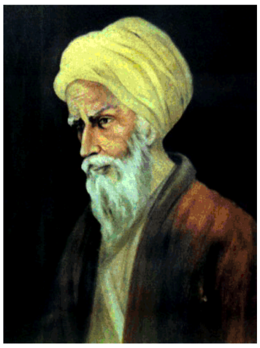
Ahol „a” és „b” a befogók és „α” az „a”-val szemközti szög. A képletet azért érdemes idézni, mert elárulja, hogy kezdetben az egész trigonometria a szinusz függvényen alapult. Alig egy évszázad múlva ugyanez az összefüggés Abul-Vafa könyvében már csak $a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$ alakban szerepel. Al-Battáni foglalkozott gömbháromszögtannal is. Könyvében található egy, a gömbháromszögtani koszinusztétellel egyenértékű törvény.

Csillagászati eredményei közé tartozik a Nap-pálya elemeinek és az év hosszának igen pontos meghatározása. Ez utóbbi alapja volt a hét évszázaddal későbbi, XIII. Gergely pápa által készített naptárnak. Igen gondos csillagász volt. Ebben jól segítették az apja által készített csillagászati eszközök. Csillagászati táblázatait Európában is sokáig használták.

AL- BAGDÁDI

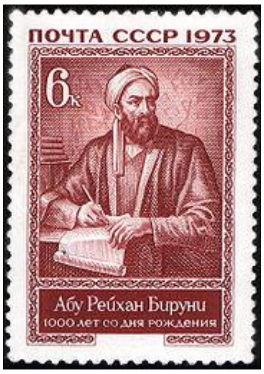
Két tanulmányát érdemes megemlíteni az egyik a maradékok kiszámításáról szól, a másik pedig az összemérhető és összemérhetetlen mennyiségekről. Ezekben Eukleidész Elemek című művének 10. könyvében is szereplő másodfokú irracionális mennyiségeket vizsgálja, mégpedig olyan geometriai szemléltetéssel, amely a derékszögű koordináta rendszert juttatja eszünkbe. Ilyen vonatkozásban Descartes előfutárának tekinthetjük.

IBN AL-HAISZAM AL HAZEN



Korának legnagyobb arab fizikusa. A mai Irak területén fekvő Basszara területén Baszra városában született. Élt és meghalt Kairóban. A híres fizikus szerette volna felhívni magára az egyiptomi kalifa figyelmét, hogy kutatásaihoz gondtalan életet biztosítson. Ezért merészen kijelentette, hogy képes olyan gépezetet szerkeszteni, amely a Nílus áradásait szabályozza.
Amikor ez történt akkor a Fáatimidák családjainak Al-Hákim szeszélyes, sőt vérengző tagja töltötte be a kalifa tisztjét Egyiptomban. Meg is bízta Al-Hazent a Nílus szabályozásával, de kilátásba helyezte, hogy amint a kívánt gépet megépíteni nem tudja, lefejezteti. Al-Hazen kénytelen volt úgy tenni mintha hozzákezdene a gép építéséhez, és nagy ügyességgel sikerült öt teljes évig húzni-halasztani a dolgot. Szerencsére 1021-ben Al-Hákim meghalt, ily módon nyert a fizikus öt évi ingyenes, bár koránt sem gondtalan ellátást. Al-Hazen különösen az optikában jeleskedett, a matematikában a nevét azzal örökítette meg, hogy az egyik fénytani feladatával számos nagy matematikus is foglalkozott. Ez az úgy nevezett Al-Hazem probléma.

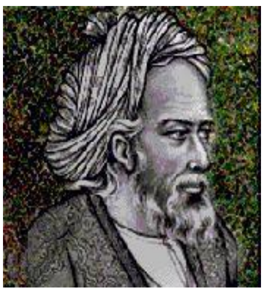
ABU RAJHÁN AL-BÍRÚNÍ



Munkáit arab és perzsa nyelven írta. Kát kikötőnegyedében született 973-ban, erre utal ragadványneve is (birún arab jelentése: kint, kívül). Matematikát és asztronómiát tanult és Levelezésben állt Avicennával. Első munkája az „al-Aszár al-báqija an al-qurún al-khálija" (Az elmúlt századok fennmaradt emlékei) című, az ókori népekről szóló hatalmas, ma is forrásként használt munka. Földrajzi leírásai közül kiemelkedik korabeli Indiáról hű képet nyújtó „Az Indiában történt dolgokról" című mű.

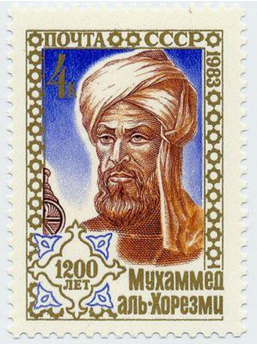
Az arab és perzsa változatban is elkészített „at-Tahfím li-aváil Szináat at-tandzsím" (Értekezés az asztrológia tudományának kezdetéről) századokon át a matematika és a geometria tankönyve volt. 1048-ban itt Ghazna-ban hunyt el.

OMAR KHAJJÁM



Iránban elsősorban matematikusként volt ismert. 1071-ben Málik sáh, szeldzsuk szultán egy naptárreform kidolgozásával bízta meg, ez az új időszámítási rendszer a szultán neve után a Dzsaláli nevet kapta. E modern rendszer alapja a 33 éves ciklus volt, amelyben nyolc szökőévet (hetet négyévente, a nyolcadikat ötévente) tartottak. Omar Khajjám a nisápuri teológiai iskolában tanított (1092), az ortodoxok azonban állandóan üldözték nézetei miatt, emiatt állását hamarosan elvesztette. Egykorú feljegyzések tanúsága szerint ebben az időben írta meg könyvét az indiai négyzet- és köbgyökvonási rendszer kritikájáról, s ekkor fejezte be Algebra című munkáját. Avicenna Metafizika-jának olvasása közben hunyt el. A keleti és az európai életrajzokban több legenda is olvasható sírjáról és más tudósokkal kötött barátságáról.

Abú Abdalláh Muhammad ibn Músza al-Hvárizmí



Abú Abdalláh Muhammad bin Músza al-Hvárizmí 9. századi perzsa matematikus. Számos könyvet írt a hindu-arab számokról és az egyenletmegoldás módszereiről. A „hindu számokkal való műveletekről" című könyve, melyet 852-ben írt valamint Al-Kindi arab matematikus művei kulcsszerepet játszottak az indiai matematika és az indiai (arab) számok nyugati világban való elterjedésében. Az algoritmus szó al-Hvárizmí nevének latinosított változatából (Algoritmi) ered, az algebra szó pedig egyik művének címéből: Hisab al-dzsabr walmukabala (szó szerint „a rövidítés és törlés tudománya"). Mivel algoritmusokkal is foglalkozott, egyesek az informatika nagyapjának tekintik.

A másodfokú egyenleteket teljes négyzetté alakítással oldotta meg. Az előjeles számokkal is foglalkozott. Kitörölhetetlen nyomot hagyott a nyugati tudomány fejlődésében. Algebráról szóló könyve ismertette meg a kontinenssel ezt a tudományt, és az egyetemek alapvető tankönyve maradt egész a 16. századig.

SZÁMRENDSZEREK

A számírásoknak három, történetileg vagy gyakorlatilag kiemelten fontos fajtája a hieroglifikus, az alfabetikus, valamint a helyiértékes számírás. Szűkebb értelemben csak a helyiértékes számábrázolást nevezzük számrendszernek. A számábrázolási rendszer vagy számrendszermeghatározza, hogyan ábrázolható egy adott szám különböző alapszámot használó számrendszerekben.

Egy számrendszer alapszáma (a) meghatározza, hogy:

- hányféle számjegyet használunk a számok leírásánál (a-féle: 0, 1, 2…a-1 vagy egyéb szimbólumok)
- mit jelentenek az egyes helyi értékek (általában az alapszám hatványai)
- milyen módszerrel írható fel/számolható át egy adott szám ebbe a számábrázolási módba: Az x egész számot az a alapú számrendszerben

$$\overline{x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_2 x_1 x_0} = x_n a^n + x_{n-1} a_{n-1} + \ldots x_2 a^2 + x_1 a + x_0$$

alakban írhatjuk le, ahol $x_n, x_{n-1}, \ldots x_2, x_1, x_0$ a szám számjegyeit jelentik.

A különféle számrendszerek legtöbbjét matematikusok fejlesztették ki, elsősorban elméleti, ill. tudományos célból, kivéve a tízes számrendszert.

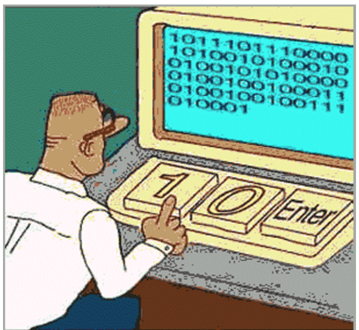
10-ES SZÁMRENDSZER

A tíz kezdettől fogva kiemelt jelentőséget játszott a számrendszerek között, alighanem azért, mert az embernek tíz ujja van. Számos nyelvben a számjegy és az ujj vagy ujjperc ma is ugyanaz a szó; ilyen például az angol digit.

Érdekes, hogy a digital valószínűleg a „digit all" szókapcsolatból jött, azaz, hogy mindent számmal írunk le, digitalizálunk.

Kezdetleges tízes számrendszert használtak az i. e. 2. évezredtől Egyiptomban (lásd jobb oldali ábra) és az indus-völgyi civilizációban, és az i. e. 1. évezredtől Kínában. Az i. u. 1. évezred közepén jelent meg Indiában az első modern, nullát és negatív számokat is tartalmazó tízes számrendszer, amit mi arab számokként ismerünk.

2-ES SZÁMRENDSZER



Real programmers code in binary.

A 2-es alapú bináris rendszert már a 17. században ismertették, de általános használata a 20. században, a számítógépek megjelenésével terjedt el. 1946-ban a Neumann János által megalkotott Neumann-elvek között szerepel a kettes számrendszer, mint a számítások számrendszere. A kettes vagy bináris számrendszer két számjegy, a 0 és az 1 segítségével ábrázolja a számokat.

Digitális áramkörökben ezt a számrendszert a legegyszerűbb megvalósítani. Oka, hogy az áramköröknek összesen kétféle állása van, zárt vagy nyitott. Így bármely olyan elektronikus eszköz, amely valamilyen számításokat végez, ezt használja.

A CD/DVD/Blu-Ray lemezeket is úgy írják, hogy vagy beleégetnek egy pontot, vagy nem. Így indokolható a 2-es számrendszer használata az adathordozóknál is.

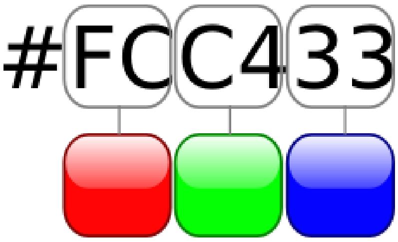
Azonban a 0 és 1 számokkal való bonyolultabb számolás, adatok megadása, mentése nagyon sok időt és helyet foglalna, így a számítástechnika sokhelyütt más számrendszert használ.

Valójában, minden számítási területhez megvan a legkedvezőbb számrendszer. A köztük való számolás a számítógépnek nem okoz gondot, hisz az átszámolás valójában rengeteg összeadásból áll, abban pedig elég jók a számítógépek.

Érdekesség, hogy van olyan karóra, ami 2-es számrendszerben számol (jobbra).

16-OS SZÁMRENDSZER

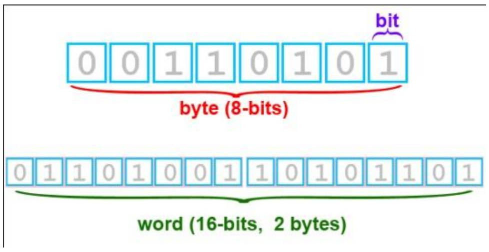
A tizenhatos (hexadecimális) számrendszer a 16-os számon alapuló számrendszer, mely a számjegyeken kívül betűket is használ (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) a számok leírására.



Jelentősége, hogy a mindennapi életünkben használt decimális és az informatikában használt bináris számrendszer előnyeit ötvözi. A hexadecimális számok két fontos tulajdonsága: nagyon kompaktak (a leírt számok rövidek, kevés helyet foglalnak hasonlóan a tízes számrendszerhez), valamint nagyon egyszerű azokat binárissá és visszaalakítani (1 hexadecimális számjegy 4 binárissá váltható át). Leggyakrabban a színek leírásánál használjuk, ahol az RGB színkódot 16-os számrendszerben adjuk meg.

8-AS SZÁMRENDSZER

A nyolcas számrendszer vagy oktális számrendszer a 8-as számon alapuló számrendszer.



Felhasználási területe szűk. Gyakorlatilag csak a számítástechnikában használják. Érdekesség, hogy a Yuki törzs Kaliforniában és a mexikói Pamenan törzs nyolcas számrendszert használ, mert az ujjközeikkel számolnak.

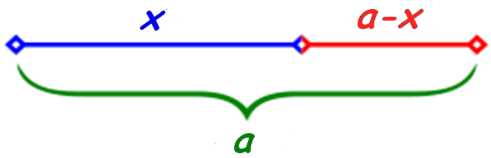
Néha a nyolcas számrendszert használják a tizenhatos helyett. A legtöbb programozási nyelv ezt a számrendszert használja, gondoljunk csak arra, hogy 1 bájt = 8 bit, tehát valójában az adatok mentésénél kombináljuk a 2-es, 16-os és 8-as számrendszert. Digitális kijelzőkön is gyakran alkalmazzák.

AZ ARANYMETSZÉS

Az aranymetszés az idő kezdete óta érdekelte az embereket. Rejtélyes és rendkívüli. Számos példát találunk az alkalmazására a minket körülvevő világban. Az *„arany arány”* értékét egy adott szakasz aranymetszéssel meghatározott részeinek aránya adja.

Az ókori és középkori matematikusok ezt az arányt az *isteni aránynak* nevezték, mert harmóniát és szépséget láttak benne. A XVI. század híres matematikusai, csillagászai és asztrológusai, mint Johannes Kepler értékes ékszernek tekintették.

Mit is jelent egy szakasz aranymetszése? Két részre osztjuk a szakaszt úgy, hogy a nagyobb rész aránya a kisebbhez olyan legyen, mint az egész aránya a nagyobb részhez. A felírt arányt másodfokú egyenletté alakítva, megkapjuk a keresett értéket.



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$
$$x^2 = a(a - x)$$
$$x^2 + ax - a^2 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \qquad \sqrt{\Delta} = a\sqrt{5}$$
$$x_1 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} < 0$$
$$x_2 = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$$

A két megoldás közül természetesen a pozitívat választjuk: $x = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$

Most már kiszámolhatjuk a szakasz és a nagyobb rész hosszának arányát:

$$\frac{a}{x} = \frac{2a}{a(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \boxed{\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi}$$

Az így meghatározott érték az aranymetszés aránya, az *„arany arány”*: $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}6180\ldots$

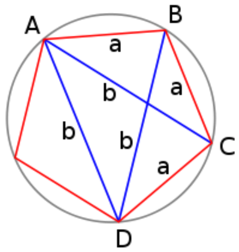
Ezt az értéket megkaphatjuk lánctörtek felírásával is. Minél hosszabb láncot írunk fel, számolunk ki, annál pontosabb közelítését kapjuk az *„arany arány”* értékének.

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}$$

Az aranymetszés értékének van néhány érdekes tulajdonsága. Ha egyet levonunk belőle, a reciprokát kapjuk $\left(\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1\right)$, ha egyet hozzáadunk, a négyzetét kapjuk $\left(\varphi^2 = \varphi + 1\right)$.

Számos példát találunk szakaszok aranymetszésére a geometriában:

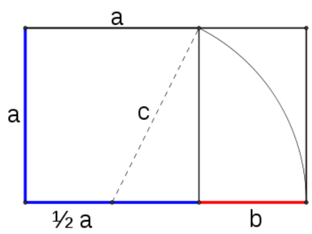
A SZABÁLYOS ÖTSZÖG



- az átlók az aranymetszésnek megfelelően osztják egymást
- ugyanezt az arányt adja az ötszög átlóinak és oldalainak hossza

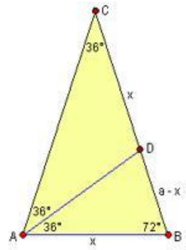
A szabályos ötszögben felismerhető arany arányt Hippasus fedezte fel és bizonyította a Kr.e. V. században

AZ ARANY TÉGLALAP



- oldalainak aránya egyenlő az aranymetszés arányával
- ha kiegészítjük egy négyzettel, amelynek oldala egyenlő a téglalap hosszabb oldalával, akkor egy újabb, nagyobb arany téglalapot kapunk
- ha levágunk egy olyan négyzetet, amelynek oldala egyenlő a téglalap rövidebb oldalával, akkor egy olyan téglalapot kapunk, amelyben megmaradt az aranymetszés aránya

AZ ARANY HÁROMSZÖG



- olyan egyenlőszárú háromszög, melyben a szárak és alap hosszának aránya az aranymetszés arányával egyenlő

A SZABÁLYOS IKOZAÉDER

- Három egymásra merőleges arany téglalap csúcsai egy szabályos ikozaéder tizenkét csúcsát határozzák meg.

Az aranymetszés és a Fibonacci sorozat közti összefüggés nagyon érdekes. Ezt a sorozatot, az olasz matematikus, Leonardo Fibonacci határozta meg, aki a XII. és a XIII. század fordulóján élt. Az első két tag egyes, az ezután következő elemek mindig az előző kettő összegeként adódnak: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.... A sorozatban az egymást követő tagok hányadosa egyre jobban megközelíti az aranymetszés értékét.

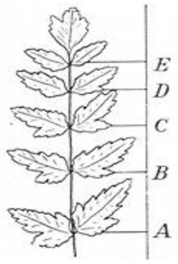
Az aranymetszés harmóniája és tökéletessége a képzőművészetben is megfigyelhető. A görög Parthenon mutatja a legjobb példát. Magasságának és szélességének aránya egyenlő a szélességének és hosszának arányával.

Az emberi test részei is követik az aranymetszés törvényét. A II. századi görög szobor, ami egy másolata az eredetinek melyet Leochares készített a Kr.e. IV. században, a legjobb példa erre a törvényre.

Az első vonal, két részre osztja az egészet az aranymetszés aránya szerint. Az E vonal mutatja az arányt a fej és a szobor felsőteste között. Az O vonal jelzi a lábak felosztását a térd magasságában az aranymetszés alapján.

A természet vizsgálata érdekes eredményhez vezetett a matematika és a botanika kapcsolatát illetően.

Az aranymetszés aránya megfigyelhető például a leveleknek a száron való elhelyezkedésén is. Ugyanazon a száron minden két pár levél között, a harmadik az aranymetszés szerint



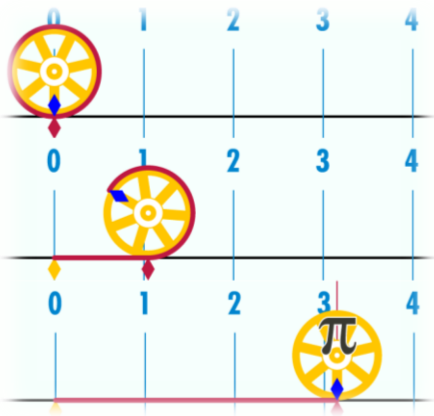
helyezkedik el. A levelek sajátos elhelyezkedési szimmetriája évszázadokig kiterjedt kutatási terület volt. Kutatók beszámoltak arról, hogy az aranymetszéshez szorosan kapcsolódó Fibonacci sorozat is megtalálható a növényekben. Például, a napraforgó magok spirált alkotnak két irányból, de a spirálok száma megegyezik a Fibonacci sorozat egymást követő tagjaival. A tobozok és ananászok pikkelyei hasonló módon rendeződnek.

Az olasz fizikus, csillagász és filozófus, Gallileo egyszer ezt mondta:

„*A matematika az az abc, amely által Isten leírta a világegyetemet*."

Az „*arany arány*" létezése a legjobb bizonyíték ezekre a szavakra.

A π



A π (pi) egy matematikai állandó, amelyet a kör kerületének és átmérőjének aránya határoz meg.

Értéke megközelítőleg 3,141592653589793. Figyelembe véve, hogy irracionális szám, általában 3,14-re kerekítik. A gyakorlatban elég 8 tizedes jegyet használni, hogy elég pontos eredményeket kapjunk a számítások során.

A π másféleképpen is definiálható, például az egység sugarú kör területe vagy a legkisebb olyan pozitív x érték, melyre $\sin x = 0$.

A legnépszerűbb módszer arra, hogy megjegyezzük a pi értékét egy rövid mondóka, úgy nevezett *Pi-vers* megtanulása, amelyben az egymást követő szavakat alkotó betűk száma megegyezik a pi számjegyeinek értékével:

Nem a régi s durva közelítés
Mi szótól szóig így kijön
Betűiket számlálva...
Ludolph eredménye már,
Ha itt végezzük húsz jegyen.
De rendre kijő még tíz pontosan.
Azt is bízvást ígérhetem.

TÖRTÉNETE

A π jelölés 1706-ban, az angol matematikus, William Jones Synopsis Palmariorum Matheseos c. könyvében jelent meg először. A π irracionális szám (ami azt jelenti, hogy nem lehet felírni két egész szám hányadosaként) és transzcendens szám (ami pedig azt jelenti, hogy egész számokon végzett véges sok algebrai művelettel – hatványozás, gyökvonás, összeadás, ... - nem kaphatjuk meg). Következésképpen klasszikus módon (körzővel és vonalzóval) nem tudunk olyan négyzetet szerkeszteni, amelynek területe megegyezik egy adott körével.

A π története nagyon érdekes. Az emberek már az ókorban is ismerték ezt az állandót. Megfigyelték, hogy egy kör kerületének és átmérőjének aránya állandó érték.

A babiloniak Kr. e. 2000-ben 3-ra becsülték, míg ugyanabban az időben az egyiptomiak $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$ módon fejezték ki.

A Kr. e. III. században Archimedes körülbelül $\frac{22}{7}$-ként adta meg, majd öt évszázaddal később a görög matematikus, Klaudiosz Ptolemaiosz $\pi \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}$ - ként.

Manapság, a π értékének a kiszámításához a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

formulát használjuk.

A *pi* végtelen, nem szakaszos tizedes tört. Az emberek idővel egyre pontosabban meg tudták határozni az értékét.

Kézi számítással a rekordot William Shanks tartotta. 1874-ben 707 számjegyet határozott meg a tizedesvessző után. Ez 15 évig tartott! Később kiderült, hogy az utolsó 180 számjegy hibás volt. 2009. december 31-én Fabrice Bellard egy számítógép segítségével a tizedes vesszőt követően 2 699 999 990 000 db számjegyet határozott meg. 2010-ben sikerült megtudni a 2 000 000 000000 000. számjegyet, ami 0. Ezt sokkal rövidebb idő alatt sikerült kiszámolni – mindössze 23 nap alatt…

TUDTAD?

Egy 60 éves japán ember 100 ezer számjegyet jegyzett meg a π-ből.

A π-nek rengeteg rajongója van. A Nemzetközi π-napot március 14-én tartják (a dátum amerikai írásmódja szerint 3.14), míg a π közelítésének napja július 22-én van (az európai dátumozás szerint 7/22 ≈ 3,1428).

A gizai nagy piramis alapja két oldalának összegének aránya a piramis magasságához 3,1416, ami négy tizedes jegy pontossággal a π-t adja.Nem tudjuk megmondani, hogy ez csak egy lenyűgöző véletlen, vagy ismeretlen zsenik szándékos műve.

A tudósok, annak reményében, hogy kapcsolatba lépnek földönkívüli civilizációkkal, a π-t egy rádiójel formájában kiküldték az univerzumba. Azt remélik, hogy az intelligens élőlények ismerik, s meg tudják fejteni az üzenetünket.

A pi-t gyakran nevezik Ludolph-állandónak is, a német matematikus, Ludolph von Ceulen tiszteletére, aki 1610-ben 35 tizedes jegyig becsülte meg a π-t.

ALAPVETŐ KÉPLETEK A Π-FELHASZNÁLÁSÁVAL

- r sugarú kör kerülete: .... $K = 2r\pi$
- r sugarú kör területe: .... $T = r^2\pi$
- a és b féltengelyű ellipszis területe:................. $T = ab\pi$
- r sugarú gömb térfogata: .... $V = \frac{4}{3}r^3\pi$
- r sugarú gömb felszíne:.. $A = 4r^2\pi$
- az egyenesszög értéke radiánban: .... π

SUDOKU

A SUDOKU TÖRTÉNETE

A számrejtvények először a 19. század végén tűntek fel újságokban, amikor francia puzzle-alkotók elkezdtek kísérletezni számok eltávolításával a mágikus négyzetekből. A Le Siècle, egy párizsi napilap közzétett egy részben kitöltött 9 × 9 mágikus négyzetet 3 × 3-as alnégyzetekkel 1892. november 19.-én. Ez nem igazi sudoku volt, mert tartalmazott kétjegyű számokat is, és inkább aritmetika segítségével kellett megoldani logika helyett, de a fő jellemzői megegyeztek: minden sorban, oszlopban és alnégyzetben megegyezett az összeg.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

1895. július 6.-án a Le Siècle riválisa, a La France finomított a puzzle-ön és ez így már majdnem egy modern sudoku volt. Ez egyszerűsítette a 9 × 9 mágikus négyzet puzzle-t, úgy hogy minden sorban és oszlopban 1-9-ig levő számok voltak megtalálhatók, de nem jelölte az alnégyzeteket. De annak ellenére, hogy nincsenek jelölve minden alnégyzetben mindegyik szám csak egyszer jelenik meg, így viszont a törött átlók vezetnek a megoldáshoz.

Ezek a heti rejtvények jellemzőek voltak olyan francia lapokra , mint például a L'Echo de Paris, körülbelül egy évtizedig, de az első világháború idején eltűntek a köztudatból.

Will Shortz szerint, a modern sudokut Howard Garns, egy 74 éves nyugdíjas indianai épitész, és szabadúszó puzzle-kivitelező tervezte. Először 1979-ben a Dell magazinban jelent meg Number Place néven. Garns 1989-ben meghalt, így nem érhette meg, hogy találmánya világszinten elismertté válik. Máig nem világos, hogy Garns vajon ismerte-e akármelyik fent említett újságot.

A rejtvényt Sūji wa dokushin ni kagiru (数字は独身に限る?) néven a Nikoli cég mutatta be 1984-ben, a Monthly Nikolist c. lapban, Sūji wa dokushin ni kagiru (数字は独身に限る?) néven, ami úgy fordítható, hogy a „számjegyeknek egyedülállónak kell lennie" vagy „minden számjegy csak egyszer fordulhat elő" (japánul a „dokushin" jelentése "nem házas ember"). Később a nevet Maki Kaji „Sudoku"-ra rövidítette az összetett szavak első kanjijának felhasználásával.

1986-ban Nikoli két újítást mutatott be: 32-ben maximálták a megadott számjegyeket, s a rejtvények szimmetrikusakká váltak (a megadott számokat középpontosan szimmetrikusan osztották el). Manapság az Ashai Shimbun-hoz hasonló vezető japán folyóiratokban teszik közzé.

ÁLTALÁBAN A SUDOKURÓL

A sudoku egy logikán alapuló, kombinatorikus számelhelyezéses rejtvény. A cél a 9×9-es rács kitöltése számjegyekkel úgy, hogy minden egyes oszlop, sor, és mindegyik 3×3-as, a főrácsot felépítő alrács 1-től 9-ig tartalmazza a számokat.

A feladat kitűzője egy részlegesen kitöltött rácsot ad, amelynek általában egyetlen megoldása van.

A kitöltött feladvány mindig egyfajta latin négyzet, egy megkötéssel az egyes területek tartalmára vonatkozóan. Például egy sudokun belül ugyanaz az egész szám nem jelenhet meg kétszer ugyanabban a sorban, oszlopban vagy a 9 db 3x3-as alrács belsejében.

A rejtvényt 1986-ban a Nikoli nevű japán feladványkészítő cég Sudoku név alatt népszerűsítette, melynek jelentése „számjegy”. 2005-től örvend kirobbanó népszerűségnek.

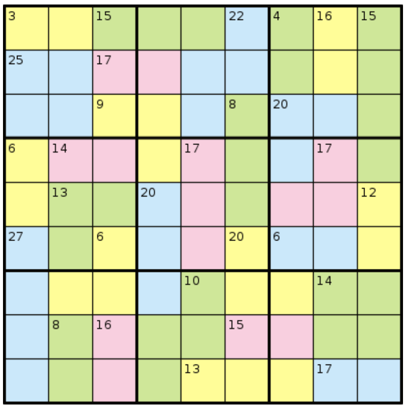
A számrejtvények a 19. század végén jelentek meg az újságokban Franciaországban.

1895. július 6-án a Le Siècle vetélytársa, a La France odáig finomította a puzzle-t, hogy az már majdnem egy modern sudoku volt.

Leegyszerűsítette a 9×9-es bűvös négyzetet úgy, hogy minden sor, oszlop és tört átló csak 1-től 9-ig tartalmazott számokat, de nem jelölte meg a kis négyzeteket.

Habár az alnégyzetek nincsenek kijelölve, mindegyik 3x3 kis négyzet csakugyan tartalmazza 1-től 9-ig a számjegyeket, és a plusz megszorítás a tört átlókra csak egy megoldáshoz vezet.

KÜLÖNBÖZŐ FAJTA SUDOKUK



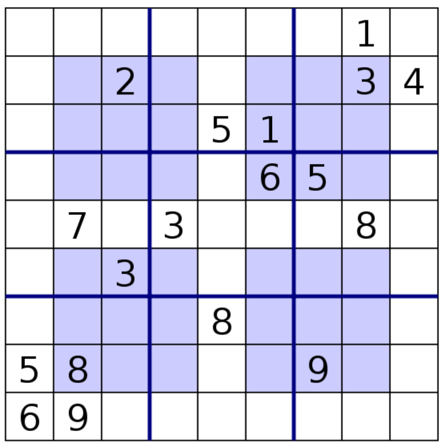
KILLER SUDOKU PUZZLE

A cél kitölteni a rácsot számjegyekkel 1-től 9-ig úgy, hogy a következő feltételek teljesüljenek:

- minden sor, oszlop és alnégyzet pontosan egyszer tartalmazza minden egyes számot
- az alakzatokban lévő számjegyek összegének meg kell egyeznie a sarkukba nyomtatott számmal
- egyik szám sem szerepelhet többször egy kis alakzatban (ez az alapvető szabálya a Killer Sudokunak, s azt jelenti, hogy semelyik alakzat sem állhat 9 mezőnél többől).

HYPERSUDOKU PUZZLE

A hypersudoku az egyik legnépszerűbb változat. Szerte a világon megjelenik újságokban és magazinokban. Az elrendezés megegyezik az alapsudokuéval azzal a különbséggel, hogy plusz belső területek meg vannak jelölve, ahol ugyancsak 1-től 9-ig kell szerepelnie a számoknak (az ábrán a kék négyzetek).



A megoldás menete egy kicsit különbözik a normál sudokuétól az átfedő négyzetek befolyása miatt. Az átfedés több információt ad a játékosnak, amivel logikailag lecsökkentheti a lehetőségek számát a fennmaradó négyzetekben.

A megközelítés a sudokuéhoz hasonló, de az oszlopok és sorok helyett az alnégyzetek és átfedések átlátásán van a nagyobb hangsúly.

MATEMATIKA A MINDENNAPOKBAN

A matematikát sokféleképpen alkalmazzuk például: a mindennapi bevásárlásnál, kölcsönöknél, a részvény és értékpapírpiacon, az építészetben, a gazdaságban, a csillagászatban, a jelszavaknál és az informatikában, a titkosírásban, a programozás alapjaiban, minőségvizsgálatnál és időjárás előrejelzésben. A következő részben a három különböző területet mutatunk be.

FIZIKA

A mai technika magas szintű fizikai tudást igényel, de ez is egy magas szintű matematikán alapszik. Talán a legjobb példa a technikai sportok királya, a Forma-1. A csapatok tervezői azon vannak, hogy megtalálják a súly, az erő és az ár megfelelő arányát. Minél könnyebb egy alkatrész, annál könnyebb az autó. Másfelől, ha túl könnyű, akkor az azt jelenti, hogy nincs benne elég anyag, ami deformációt okozhat.

De a matematika nemcsak a technikai sportokhoz szükséges, hanem egy egyszerű ház tervezéséhez is, mivel tudnunk kell, hogy mennyi anyagra van szükségünk. Arról nem is beszélve, hogy néha hibázunk, és akkor még több alapanyagra van szükségünk, mint amekkora mennyiségre eredetileg gondoltunk.

ÜZLETI ÉLET

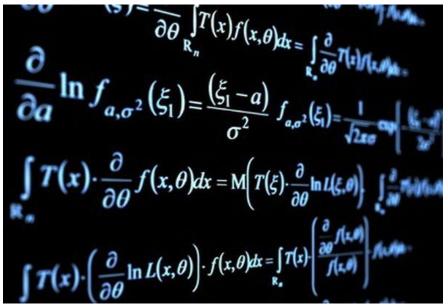
A matematika fontos szerepet játszik a mindennapokban, és az üzleti életben egyaránt. Az üzleti életben leggyakrabban az egyszerűbb matematikai műveletek jelennek meg:

Az összeadás, a kivonás, a szorzás, az osztás, és a százalékszámítás. Rengeteg számszerű adattal foglalkoznak, úgy mint a munkaidő, az árumennyiség, a munkaerő létszáma és még sok minden más, de ami mindenhol, mindenben jelen van, az a pénz.

Az üzleti életben az egyik legfontosabb tényező a profit, a vállalkozó valós haszna, ez az, ami az üzleti életet mozgatja. Ahhoz hogy a profitot meg tudjuk határozni, rengeteg műveletet kell elvégezni. Ki kell számítanunk az összes bevételünket és az összes kiadásunkat, melyeknek a különbsége határozza meg a profitunkat, ha ez pozitív, akkor az jó, ha negatív akkor meg kell nézni, hogy lehetne pozitívvá tenni. A bevétel kiszámítása egy adott időtartamra (általában egy hónap vagy egy év) nem annyira nehéz, mint a kiadás kiszámítása. Ahhoz, hogy kiszámítsuk a bevételt, egyszerűen csak össze kell adnom az eladott termékek, vagy szolgáltatások után kapott pénzt.

A kiadások kiszámítása már komplikáltabb. Vegyük példának egy egyszerűbb vállalkozás kiadásait (és azokat is nagy vonalakban). Tételezzük fel, hogy szeretnénk létrehozni egy pattogatottkukorica-árusító vállalkozást. Ahhoz, hogy eltudjunk kezdeni árulni, kellenek gépek eszközök, amik ezt készítik, ahhoz hogy ehhez pénzünk legyen, kezdő tőkére van szükségünk, mely, ha nincsen saját zsebben, akkor támogatóktól, illetve hitelből lehet szerezni. Miután megvannak a gépek, kellenek alkalmazottak, akik dolgoznak, illetve árusítanak, nekik van fizetésük, amit meg lehet határozni havi fix összegben, illetve órabér után számított fizetést is kaphatnak. Az alkalmazottal járó költségek nem csak a fizetésből állnak, kell utánuk fizetni többféle adót, melyeket a fizetéstől függően bizonyos százalék alapján határoznak meg. Ha már van gép, és alkalmazott, akkor kell termék, vagyis pattogatott kukorica is, amit el lehet adni. A pattogatott kukoricához meg kell venni az alapanyagokat: kukorica, ízesítőszerek, különböző méretű zacskók, illetve szalvéta.

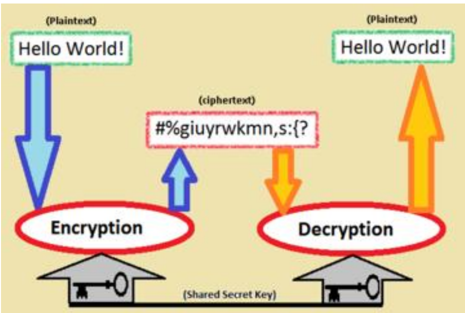
A termék árába bele kell kalkulálni, hogy mennyibe kerültek a nyersanyagok, és egy annál magasabb értéket kell meghatározni melyből, ha egy hónapban az összes eladott pattogatott kukorica után befolyt összegből kivonom az előállításhoz szükséges kiadásokat, a munkások bérét, illetve kifizetem a hiteleket vagy a befektetőket, akkor kell, hogy maradjon nekem is valamennyi, hiszen ebből kell megélnem, ez a profit.



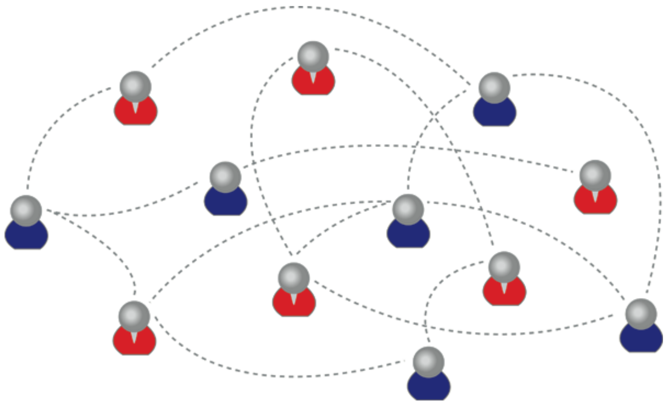
Mikor az üzleti életben kiszámítják a profitot, akkor azt prezentálják a vezetőknek, befektetőknek, tulajdonosoknak, hiszen ez alapján tudják a vállalkozás jövőjét tervezni, illetve, változtatni a működésen úgy, hogy még hasznosabban, nagyobb profitot lehessen termelni. Egy ilyen prezentáción táblázatokat, grafikonokat használnak fel, melyeken ábrázolják az előbb említett kimutatásokat.

Informatika

Egy másik fontos tudomány a titkosítás, és ebben nagy szerepe van a matematikának. A modern kriptográfia használja a matematika, a számítástudomány és elektromos technológia eredményeit. A titkosítás főbb alkalmazásai a bankkártyák, a jelszavak, az elektronikus kereskedelem.



A modern titkosítás két főbb részre tagolható. A szimmetrikus és az aszimmetrikus, más néven publikus kulcsú titkosításra. A szimmetrikus kulcsú titkosítás olyan titkosítási módszereket használ, melyeknél a kommunikáló felek megosztják egymással a titkosításhoz használt kulcsot. Egy nagy hátránya a szimmetrikus titkosításoknak az, hogy a kulcsokat mindenképpen nagy biztonságban kell tartani. Ideális esetben minden kommunikáló fél saját kulcsot használ, jobb esetben minden fél minden üzenethez külön kulcsot használ. Ekkor a kulcsok száma exponenciálisan növekszik a kommunikációban résztvevők számával, így ez nagy mennyiségű kulcs gyors és biztonságos kezelését kívánná meg. De van egy másik megoldás is.

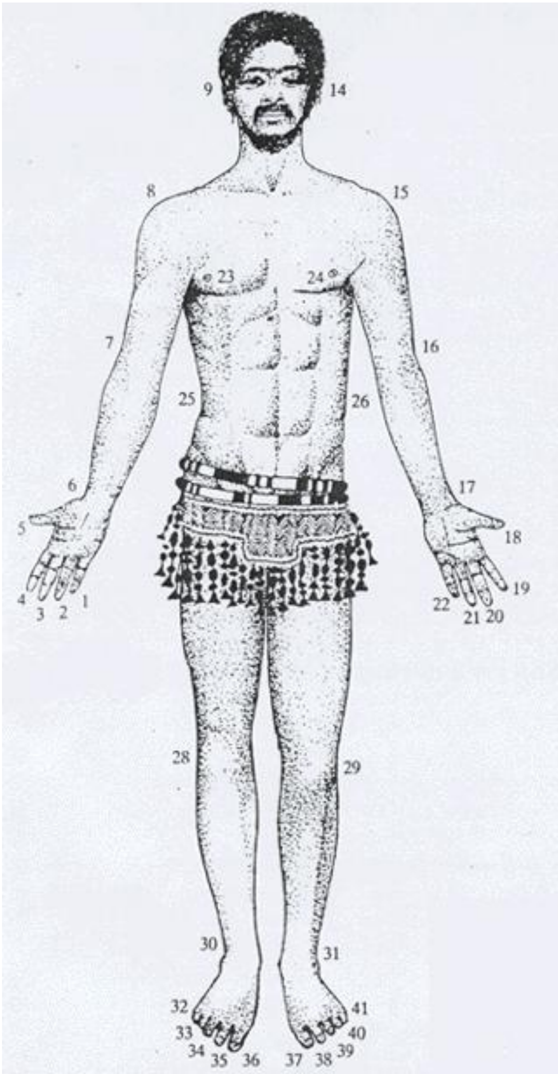


A nyilvános kulcsú titkosítások rendszerint számelméleti vagy más nehéz matematikai problémán alapulnak. Például az RSA titkosítás a számok faktorizációjának (prímtényezőkre bontásának) nehézségén alapul. A probléma nehézségénél fogva az ilyen tikosítások rendszerint szorzást, logaritmust vagy exponenciális számításokat használnak, melyeknek nagyobb a rendszerigénye, mint a szimmetrikus kulcsú titkosítóknak. Ennek eredményeképpen a nyilvános kulcsú titkosítások rendszerint kombináltak, melyekben egy gyors szimmetrikus kulcsú algoritmus kódolja az üzenetet, de a kulcsot egy aszimmetrikus titkosítás után továbbítják.

PREHISTORIC MATHEMATICS

Nowadays counting is a daily routine. Numbers are shown in different ways and we use them for different purposes. Digits 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 are combined in various complex ways.

It's supposed that prehistoric people might have used only words like "one", "two" or "many" in different combinations. For example to express number 5 they would say "two, two, one". To express numbers over 6 they needed to say "many". Groups of objects were connected in pairs, for example animals on the pasture. This way people could count objects disregarding their type. First tools used for counting were fingers of one hand and later of both. With time the need to record numbers appeared. In the very beginning, primitive calculations were executed. It started with different sort of incisions. Let's imagine a prehistoric shepherd had to count 88 sheep. He would sit near the cave with some bone and a piece of rock. Each time one sheep left the pasture he probably made one cut more. Then by checking these incisions he could easily get to know how many sheep went back home. The other way of counting depended on touching one's own body in certain places, what can be seen in the picture. Next came counting by groups, for example five sticks were grouped into bundles and these bundles into heaps etc. It was the beginning of present dozens and the majorities.

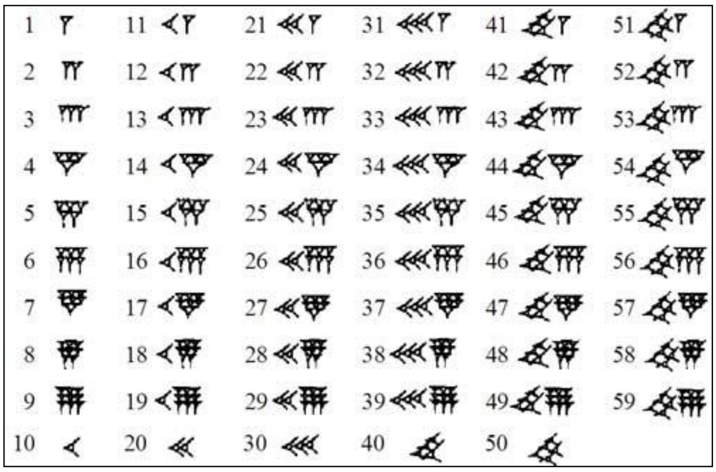


Ability of counting was also used for different kinds of measurement. Dimension of objects was measured by comparison with different elements of body, for example inch, foot and elbow. Capacity of things was measured by capacities of vessels in which they were kept. Distances were measured with units like step or furrow. With time these natural units were averaged, because not every elbow or foot is the same.

The need ofcounting, measuring, weighing accompanied human beings for thousands years. Nowadays we cannot imagine life without knowledge of numbers. That's why it's worth to turn our attention to prehistoric people who had to manage without it. They showed their inventiveness and shrewdness in the counting domain. We must remember that thanks to their primitive methods mathematics developed as it's currently known. These prehistoric mathematicians are fathers of this subject. They didn't realize what great discovery they made and what influence it would have on the future generations. We can call them geniuses – they created something that we seem to believe have always existed.

MESOPOTAMIAN MATHEMATICS

Much is known about Mesopotamian mathematics, as baked clay tablets with cuneiform symbols impressed in them have remained from that period due to the dry climate. Several historians think that it is likely that a great deal of the mathematical knowledge of the ancient world, ranging from Rome to China, diffused from Mesopotamia. The Mesopotamians were one of the 4 cultures that developed place value (along with the Chinese, India and Maya). But there is one essential difference between a modern place-value system and theirs,: the Mesopotamians did not have zero (A symbol for zero was probably invented either in Indochina or India about the seventh century CE).



Even without the zero, the Mesopotamian place-value system provided many benefits, including simple algorithms for the basic arithmetic operations. In addition, the Mesopotamians made the logical step of extending the places to numbers smaller than one, just as we do with decimals.

The Mesopotamians also developed a practical method for finding square roots, essentially the same method still taught in some elementary and secondary schools in the United States, but now replaced with the use of electronic calculators. They were also able to solve any quadratic equation and some cubic equations.

It was once fashionable to say that the Mesopotamians were good at algebra but weak in geometry. Later historians discovered, that Mesopotamians were the earliest people to know the Pythagorean and the Thales theorem (Pythagoras and Thales might have travelled there, and they may have learnt their famous theories there).

Probably the criticism of Mesopotamian geometry began when according to some sources it turned out that they used a value of three for π. Later discoveries, however, showed that at least some Mesopotamians used 3.125 for π, a value about as good as the one their contemporaries in Egypt used.

MATHEMATICS IN ANCIENT EGYPT

The ancient Egyptian mathematics is the mathematics which was written in old Egyptian language. In the Hellenistic age the Egyptian language was replaced by the Greek language among the scientists, so from then the Egyptian, the Babylonian and Greek mathematics united to form Hellenistic Mathematics. Later the Arabs were going on with this mathematics as a part of Muslim mathematics, so Arabic became the language of the Egyptian scholars.

NUMERALS

We know the ancient Egyptians' number writing from 4000 year-old- papyrus finds. This is a simple system which can be understood easily. They counted in the decimal system, but without place value. There was a special sign for the figure one, the ten, the hundred and for the thousand. The numbers were compiled from these, but they, differently from us, wrote them from right to left. This simplicity has a price of course, since very long numbers may have been formed in certain cases, which are difficult to read.

tollvonás:	stroke of a pen
kengyel, béklyó:	stirrup, hobble
kötéltekercs:	roll of rope
lótusz:	lotus
középső ujj:	middle finger
ebihal:	tadpole
a végtelen istene:	the god of infinity

1		tollvonás
10		kengyel, béklyó
100		kötéltekercs
1 000		lótusz
10 000		középső ujj
100 000		ebihal
1 000 000		a végtelen istene

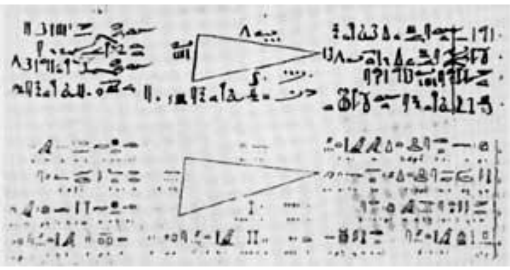
for example:  = 2213

Sources: The Egyptian coils

The oldest mathematical text discovered until the today – the Moscow papyrus – an Ancient Egyptian one (from the middle empire coming from BC 2000. – BC 1800. They preserve this papyrus in Moscow Puskin Museum. This papyrus is about the same as the above Rhind papyrus.

It contains exercises with text, similarly to most ancient mathematical texts, which seems to have been written for entertainment. One of the tasks is considered particularly significant since it gives a method to calculate the volume of incomplete bodies (frustum).

The Rhind papyrus (BC 1650.), which is another important Ancient Egyptian mathematical text, is a handbook to arithmetics and geometry. It is an arithmetic and geometry book compiled by the Egyptian clerk, Ahmesz. The document has become known as the Rhind papyrus, after its Scottish discoverer. In this Ahmesz writes, among other things, how to calculate the area of a trapezoid plough-land (a triangle with a cut-off peak), the volume of a pyramid. There canbe found fractions, arithmetic and geometric progression, and first degree equation with one unknown in it. This document is kept in London today.



It serves as evidence for the area formulae, multiplication, division methods and also for the existence of other knowledge such as fraction operations, among other things, the composite numbers, the knowledge of the prime numbers and the arithmetic one, the geometry and the calculation of the harmonic mean. It also describes Eratosthenes sieve in a simplified form and the theory of the perfect number (namely the 6). It also shows how to solve linear equations, and arithmetic and geometric progressions.

The three geometric formations on the Rhind papyrus indicates it, that the basic principles of analytic geometry was known for them

(1) how we define the value of π with a margin of error within one percent.

(2) an early attempt to squaring the circle

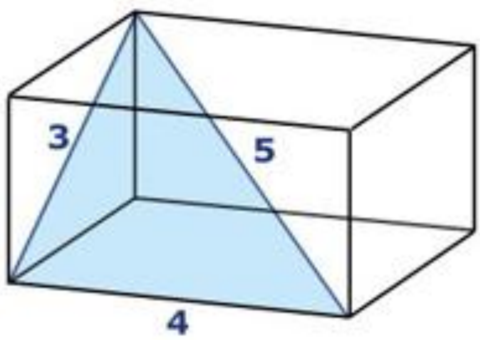
(3) the earliest usage of the cotangent

The cylinder, as a grain container also appears on the Rhind papyrus. This shows that they were able to calculate the volume of the circle cylinder, a cube and a cuboid. They counted the area of the circle with the formula: $=\left(d-\frac{d}{9}\right)^2$, where d marks the diameter of the circle. Here they worked with the number 256/81 = 3,1605 instead of π. This is near the actual value of π.We found on the papyrus a triangle with a side of 3, 4 and 5 units though, but nothing shows that they would have said, it was a rectangular triangle, the is Pythagoras theorem. This papyrus proves however, how developed the Egyptian mathematics was. Naturally it had its influence on the Greek mathematicians, primarily on Thales and Pythagoras.

Finally the Berlin papyrus (i. this. 1300) proves it, that the solution of the quadratic algebraic equations was known for the ancient Egyptians.

OTHER INTERESTING POINTS

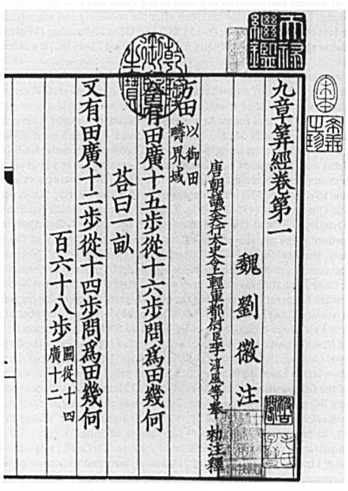
In the pyramid of Kheopsz the golden ratio can be found. In this pyramid the three Pythagorean-numbers 3, 4, 5 can be discovered in the sizes of the king room.



THE MATHEMATICS OF ANCIENT CHINA

The mathematics of ancient China is not really known, as in 212 B.C. the Chinese emperor Qin Shi Huang ordered to burn all books (except those ones of the Qin country, into which China was converted while this dynasty ruled). Only little information on this subject remained in books that were not burned despite the order.

The oldest document that is a mathematics knowledge compendium of those days is "Mathematics in Nine Books". It is a set of some works written by different people in different epochs. There were 246 tasks collected in it, all of them presented in the same way: firstly the task is formulated, then the answer is given and at the end there is the solution. For example one of the books contains a task with the "fang-czeng" method, which shows how to solve the system of n linear equations with n unknowns. It is similar to present-day Cramer's method of determinants. Feng –czeng means putting the numbers in cages – blanks. This name originates from the fact that in ancient China the algebraic calculations were made on a checked mathematical board.



九章筭經卷第一 魏劉徽注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋

方田 以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

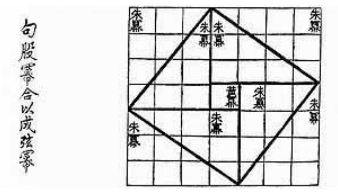
荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

荅曰百六十八步 圖從十四廣十二

Zhoubi suanjing is the oldest complete Chinese text concerning Mathematics. It goes back to the period between 100 B.C. and 100 A.D. The text contains the Gougu principle - the Pythagorean theorem was repeated there. And there were described calculations with fractions with common denominators as well.

Another of the oldest documents is "The Treatise of Measuring Rod". It is mainly devoted to astronomy, still it contains the Pythagorean theorem. It is not known however, if the Chinese found it out or they gained the knowledge from outside their country.



Another book that avoided burning was Mo Jing. It was written in about 330 B.C. by followers of Chinese philosopher, Micius (470-390 B.C.). It referred to geometry and described many different aspects of physics and mathematical methods.

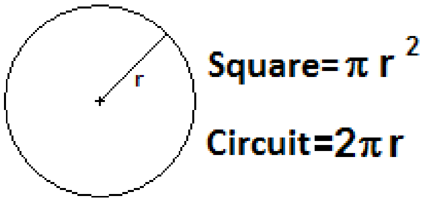
About 4th century B.C. the counting sticks became popular. They were based on decimal- like notation. Puzzles, riddles and magic squares were wide-spread in those days.

One of the most important mathematical achievements of the Chinese people is the decimal system of numbers, which is widespread nowadays. It goes back to the Shang epoch (1600 B.C.- 1046 B.C.). The earliest discovered subject connected with this field of knowledge was the shield of tortoise with number 123 written on it. The scratched figures stand for: 1- symbol of hundred; 2- symbol of ten and 3- symbol of entity. In those days it was the most advanced numeral system in the world.

Later on in China, due to the progress in Mathematics knowledge there appeared an instrument called suanpan. It was an equivalent of a counter. The vertically arranged wires were divided into two parts. In the first one there were five balls and in the other one there were three balls. The value of each ball in the second part was equal to the value of five balls in the first part. That means, if the value of the ball in the first part was 1, in the second part the value of each ball was 5. This instrument helped to do quickly all mathematical operations, like : addition, subtraction, division, multiplication, square and cube extraction of root.

The negative numbers are a very important achievement of the Chinese. In order to distinguish them from the positive numbers they used colours - black (negative) and red (positive). What is more, they had different names. The first ones were called “fu” and the other ones – “czeng” (they established the name of the method “fu-czeng” which was mentioned at the beginning of the article).

Still earlier than the negative numbers, the fractions had been found. They used: ½ (called a half), 1/3 (called a small half) and 2/3 (called a big half).



Another achievement of Chinese scientist, Liu Hui (3rd century A.D.) was π number. Its value, according to him was 3,14159. In 5th century A.D. Zu Chongzhi and his son Zu Gengzhi defined the value of it up to the tenth place after comma, i.e.: 3,1415929203.

About 1100 A.D. in ancient China a theorem appeared in relation to numbers that occur in the triangle. In 1303 Chinese mathematician, Zhu Shijie wrote a book “Valuable Mirror of Four Elements” (the original title was: “ Szu – yu Yu – chien”). It was the top achievement of Chinese algebra. There were numerical methods how to solve equations up to 14th degree (nowadays it is known as Horner’s schema) described in it and the triangle theorem (mentioned above), which appeared in Europe only in 17th century, thanks to Blaise Pascal. From him the name Pascal’s Triangle originates.

The Chinese mathematicians used different algebraic and geometric transformations. They were able to solve quadratic equations, calculate division residual and areas of simple figures (i.e. a rectangle, a triangle, a circle, a trapezium and fragments of circle and sphere assuming that π=3). They used a system of reckoning similar to positional one, but the zero was not in use. Instead of it they simply used a blank space.

The multiplication table was a curiosity as it had to be sung, not spoken during the examination in mathematics (candidates for civil servants had to pass it). Maybe the tag: “One passed singing” originates from that event.

Mathematics of Ancient Greeks

(550 B.C. – 300 A.D)

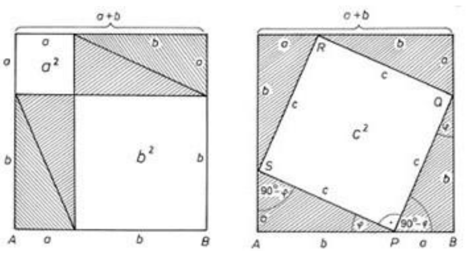
Although the representatives of Greek and Hellenic mathematics lived scattered all over the Eastern Mediterranean, they are considered to make one unit. The Late Greek mathematicians are called Hellenic mathematicians.

They made mathematics much more sophisticated using the new deductive reasoning method for the first time, than anyone had before. In contrast to cultures before them they did not set up rules based on repeated observations, but they came to conclusions with the help of logic from definitions and axioms.

PYTHAGORAS, 'FATHER OF NUMBERS' (582 – 496 B.C.):

He was a Ionic mathematician, astronomer, philosopher and musicologist. He was the founder of the Pythagorean School of Philosophy in Croton. He was hold there in almost divine respect, they thought that 'among existing creatures there are gods, there are humans and there are ones like Pythagoras.' It is hard to divide his work from those of his pupils, they found out together the basics of resonance, which means the height of the sound is the function of the vibrating string. However, the theory bearing his name is probably not their invention, even more, it is possible that neither were they the first to prove it, but among the Greeks they used it for the first time and it's elaboration was their merit.

The most perceptible demonstration of the theory is based on removing planes: we have put 4-4 coincident triangles in the two squares. Then the rest of the area is equal to the square of the hypotenuse in the right picture and to the sum of the squares of the other two sides in the left one.



THALES (624-546 B.C.):

He was a mathematician, philosopher and astronomer from Asia Minor. The very first Greek mathematician whose name survived. He travelled throughout the known world of that time, he worked as a political advisor as well and he established the Milesian School. None of his authentic works survived, we know them from descriptions by others. He introduced the concept of angles to mathematics, he drew up the Thales-theory and the theory of parallel winds.

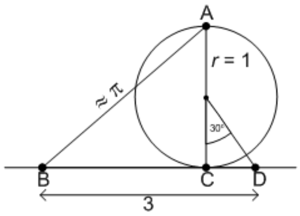
ARCHIMEDES: (287-212 B.C.):

He was a Sicilian mathematician, physicist, astronomer and philosopher. He was one of the greatest mathematicians ever. He spent the last part of his life at the court of his relative, the prince of Syracuse and he did him useful services. He died in the fall of the city, an angry Roman soldier stabbed him after his famous words: 'Do not disturb my circles!' Despite the deficiency of the civilization surrounding him, where ten thousand meant infinite, he could describe numbers to 10^{64}. He did rudimentary integrals, though their punctuality is unknown. He approached the value of π to 22/7, which was still generally used in the Middle Ages. He was so proud of defining the rate of the volumes of the cylinder, the sphere and the cone all of the same height and diameter that he ordered an illustration of it to be carved onto his tombstone.

FOUR OUTSTANDING GEOMETRIAL PROBLEMS:

1. QUADRATURE OF A CIRCLE:

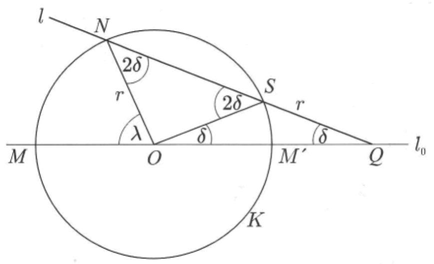
It is the challenge of constructing a square with the same area as a given circle, which means constructing a square with edges of $\sqrt{\pi}$. It was one of the most popular mathematical problems, though it can not be solved using Euclidean geometry. Even the Greeks suspected it, but it was proved by Ferdinand von Lindemann only in 1882. Non-euclidean construction approaching the value of π:



$$AB = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \approx 3.14153\ldots$$

2. ANGLE TRISECTION:

The Greeks suspected that it was impossible to solve angle trisection but it was not proved until the Modern Times. Constructions resulting in analytically irreducible cubic equation can not be solved in the Euclidean way. Angle trisection results in one, because we would have to construct the real roots of the equation $x^3 - 3x - 2\cos\alpha = 0$ if $2\cos\frac{\alpha}{3}$ is unknown. However, there are some angles which, when replaced in the equation , result in rational roots and then the construction can be done as well. For example: if $\alpha = \pi$ the equation is: $x^3 - 3x + 2 = 0$, which has a real root $x = 1$, so $\beta = \frac{\alpha}{3} = \frac{\pi}{3} = 60°$ can be constructed.



$\sphericalangle MON = \lambda, SQ = OM \Rightarrow \sphericalangle SQO = \frac{\lambda}{3}$

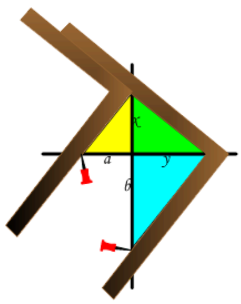
A general construction is possible only with Non-Euclidean tools:

3. CONSTRUCTION OF A REGULAR HEPTAGON:

It can not be solved in a Euclidean way and a Non-Euclidean method was found only in 1975, by Johnson, which is the so-called Neusis.

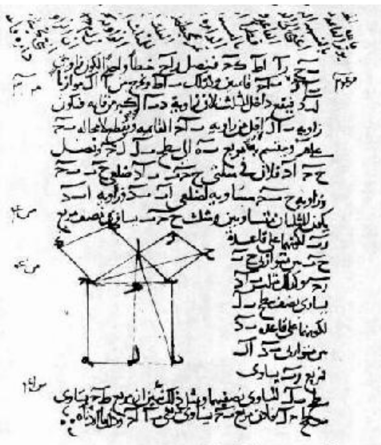
4. DOUBLING A CUBE:

In this problem, the edges should be constructed of a cube which has a two times bigger volume than the given cube. In the myth Delians should have doubled the altar of Apollon's temple, making the gods dispel plague. Considering the edges of the given cube one unit, our task is to find the positive real root of the irreducible cubic equation $x^3 - 2 = 0$ which means constructing the section $x = \sqrt[3]{2}$, which is not possible using Euclidean tools. Archimedes sized up the sections a and b to a perpendicular pair of lines,



then with the help of two rulers sliding on each other and posed to the nails inserted in the endpoints of the sized up sections he adjusted the two right angles to the perpendicular lines. So $a : x = x : y = y : b$.

The Periods of Arab Mathematics



An early Arabic translation of the Pythagorean theorum.

The collection of the Greek, Egyptian, Mesopotamian, and Indian traditions, and their translation into Arabic, took all the 8th century. This is the age of Abbászida. In the house of science in Bagdad there was a library and an observatory at the researchers' disposal. On the Ibér peninsula, Cordoba was the centre of science.

In the 9th century started the commenting of the translated libraries and on the basis of them started a special-Arabic development. The most important mathematicians were: Al-Hvárizma, Al-Kindi, Szábit Ibn, Kurra, and Al-Mahani. In this age arithmetic, geometry, trigonometry, the algebra and the method of approximation developed.

Trigonometry and the method of approximation gets into the centre of attention. Algebra also developed. Considerable mathematicians of this age were: Abul-Vafa, Al-Karadzsi, Al-Brúni, Omar Hajjám, Abu-Kámil and Al-Battáni.

In the 13th-15th centuries, under strong Chinese influence, the numerical methods became important. The outstanding mathematicians were: At-Túszí, Al-karhi, Al-magribi, Ibn Al-Haiszan and Al Kalaszádi.

The Most Important Mathematicians:

Al-Battáni:

He did trigonometry in the context of astronomy. He was born in the south of Turkey, in Harrána, and died in Samarra, in today's Iraq. He was in the sect of stars worshippers. His astronomical observations were made in the towns of Antiokhia and Arakta. Just one of his books survived, it was written about the movement of the stars.

His merit is that the Hindu sinus notion (chord of central angles) is more popular, than the Greek sinus notion (To a central angle half of the chord of a double size central angle belongs). Already Szábit Ibn Kurra was using this version, but its spreading in Europe was Al-Battáni's merit. Although he knew the other trigonometric functions, he used just this one when he wanted to define one side of a right-angled triangle in his book.

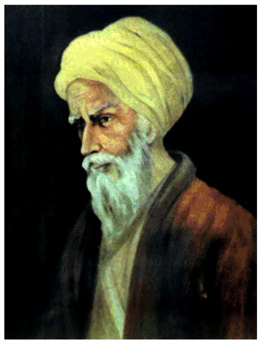
$$b = \frac{a \cdot \sin(90 - \alpha)}{\sin \alpha}$$

Where the "a" and "b" are the legs, and the "α" is the opposite angle of "a". The formula is important, because this formula reveals that, in the beginning the whole trigonometry was based solely on the sinus function. Almost one century later the same relationship can only be found in this form: $a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$ Al-Battáni delt with spherical triangle theses too. In one of his books, we can find a law equivalent to the cosine formula law in spherical triangle theses. His astronomical achievements are: the location of the elements of the sun's orbit, and the definition of the quite exact length of the year. The latter was the basis for of the calendar Pope Gregory XIII. made seven centuries later, which is still in use today. He was a very careful astronomer helped by his father's home-made astronomical tools. His astronomical table was used in Europe for a long time.

Al- Bagdádi:

He had two important studies. The first was written about the calculation of the remainder. The second was about the commensurable and incommensurable quantities. In these researches he scrutinized the second degree irrational quantities, which are in the 10th book of Euclid too. He was examining it in a way, which reminds us of the rectangular coordinates. So we can call him: the predecessor of Descartes.

Ibn Al-haiszam Al Hazen:



He was the greatest Arab physicist of his age. He was born in the territory of Basszara, in Baszra city in today's Iraq. He lived in Kairó. The famous physicist wanted to call the attention of the Egyptian caliph on himself. Maybe, he wanted support to a carefree life for his research. This is why he dared to declare: “He can build a machine which can control the floods of the Nile.” In this time, the caliph in Egypt was Al-Hákim from the capricious and bloodthirsty Faátimidá family. He instructed Al-Haiszam to start regulating the Nile, but he said: “If he can't build it, he will lose his head.” AL-Hazen was forced to pretend that he started to build the machine.. He was very clever, and he could play for time for 5 years. Luckily Al-Hákim was dead in 1021, this way, he had gained 5 free, but not carefree years. Al-Hazen was prominent in optics. He made himself known in mathematics because some of the great mathematicians dealt with one of his optical problems. This is the so-called Al-Hazem problem.

Abu Rajhán al-Bírúní

He was born in Kát in 973. He wrote his works in Arabian and Persian languages. He was studying Mathematics and Astronomy and he was also corresponding with Avicenná later. His first work is about the ancient people, it is called “the memories of the previous centuries”. One of his greatest books in connection with Geography is “About the things happened in India”. In this book he used his experiences collected during his traveling through this country.

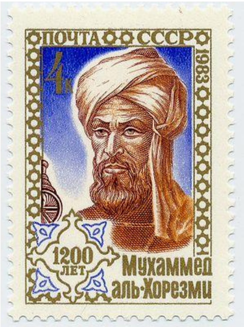
One of his books was the course book of Mathematics and geometry for centuries. He died in Ghazna in 1048.

Omar Khajjám

He was known in Irán as a mathematician. He was studying in Nisápur and he was dealing with all parts of science. His greatest work was a new calendar system. In this system there were eight leap-years in 33 years. He also taught in a school, but because of his religious beliefs he had to leave it.

In this time he wrote his critical study of the Indian square root and cubed root system and he finished The Algebra. He died while he was reading the book Metaphysics of Avicenna. There is a mystery about his grave and some legends about his friendships with other scientists.

ABÚ ABDALLÁH MUHAMMAD IBN MÚSZÁ AL-HVÁRIZMÍ



He is a Persian mathematician and lived in the 9th century. He wrote several books about the Hindu-Arabian numbers and the methods of solving an equation. These books played a very important role in the spreading of the new numbers in the ”northern world”=Northern Europe. As he also dealt with algorhitms, some people call him the grandfather of information technology.

He was the first, who solved the quadratic functions with completing the square. He spent some time with dealing with positive and negative numbers. He made Algebra known on the European continent with his book, and this book remained a basic coursebook at the universities until the 16th century.

NUMBER SYSTEMS

Writing numbers has three historically or practically very important ways, the hieroglyphic, the alphabetic and digit number writing. In a narrow sense, only the digit number representations are called number systems. The number representation system, or number system determines the way how the number can be represented in the number systems using different base numbers.

The base number of the system (a) determines that:

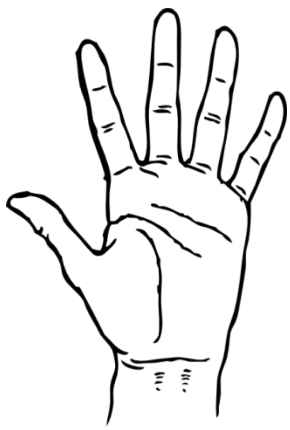
- How many digits (symbols) are used to discribe a number (a-piece: 0,1,2…a-1)
- What does each digit represent (usually the power of the base number)
- How can a given number be written or converted into this system: The integer x can be written in the following form in the a based system:

$$\overline{x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_2 x_1 x_0} = x_n a^n + x_{n-1} a_{n-1} + \dots x_2 a^2 + x_1 a + x_0,$$

where $x_n, x_{n-1}, \dots x_2, x_1, x_0$ are meaning the digits of the number.

The different number systems were developed mostly by mathematicians, primarily for theoretical or sientific purposes, except the decimal system.

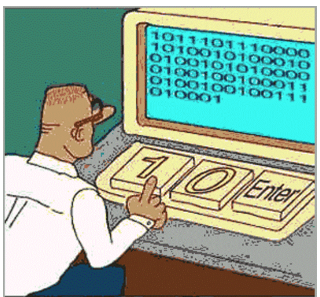
THE DECIMAL SYSTEM:



The decimal number system is the most common way of representing numbers. The number ten has had priority in the importance of the number systems since the outset, probably because people have ten fingers. In many languages such as English, the word digit means a part of a number and a part of the finger as well. It is interesting that the word Digital probably came from the phrase „Digit All”, that is, we are writing down everything in two digits, we are digitizing.

A primitive decimal system was used from 2000 B.C. in Egypt and in the Indus Valley civilization, and from 1000 B.C. In the middle of the first millennium the first modern decimal system appeared in India, including zero and negative numbers as well, which we know as Arabic numbers.

THE BINAL SYSTEM:



Real programmers code in binary.

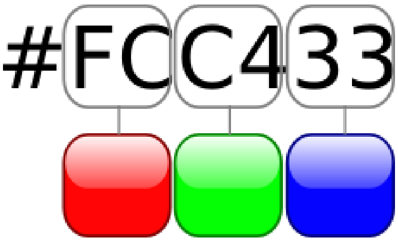
Although the 2 based binary system was known in the 17th century, it became generally used only in the 20th century with the appearance of the computer (based on János Neumann's proposal). The binary system can represent numbers by the digits 0 and 1. In digital circuits, this numbersystem is the easiest to put into practice. The reason for this is the fact that the circuits have only 2 types of jobs: it either conducts, or it does not. Thus, any electronic device that performs some calculations, uses the binary system.

The CD/ DVD/ Blu-Ray discs are written by burning a point into it or not. This way the use of the binary system can be justified for the data carriers. But the more complex counting with 0 and 1, entering and saving data would take a lot of time and storage, so the computer technology uses different number systems many times. In fact every computing area has its best number system. The conversion between the systems is not a big problem for the computer, because it consists of only plenty of addition, and computers are good enough at it.

It is interesting that there is a wristwatchwhich computes and shows the time in the binary system (on the right).

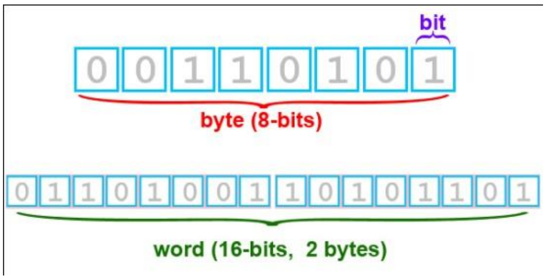
THE HEXADECIMAL SYSTEM

The hexadecimal system is based on the number 16 which uses letters as well as digits (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) to describe numbers.



Its relevance is that it combines the benefits of the number systems that we use in everyday life and in IT. The hexadecimal numbers have 2 important features: they are compact (the numbers described are short, and use only little storage like the decimal system), and it is very simple to convert them back to binary (1 hexadecimal digit is equal to4 binary ones). Most commonly it is used for describing colors, where we enter the RGB color code in hexadecimal.

THE OCTAL SYSTEM



The octal system is based on the number 8 which uses the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 to describe numbers. Its uses are limited. Practically it is used only in computing. Interestingly the Yuki tribe in California and the Mexican Pamenan tribe use octal system, because they count with the gaps between their fingers. Sometimes the octal system is used instead of hexadecimal. Most of the programming languages use this number system, mind that 1 byte is 8 bit, so actually when saving data, binary, octal and hexadecimal systems are combined.

At digitaldisplaysthis system is often used.

THE GOLDEN NUMBER

The golden number has been fascinating people since the dawn of time. It is mysterious and exceptional. We can find numerous examples of its application in the surrounding us world. The so called golden division of segment constitutes the source of the golden number.

Ancient and medieval mathematicians used to call the golden division of segment "the divine ratio" as they saw beauty and harmony in it. Famous mathematician, astronomer and astrologer from the XVI century – Johanes Kepler defined this proportion as a valuable jewel.

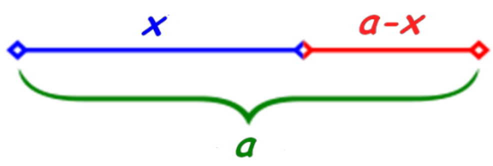
What is the golden division of segment then? It is such a division of a segment into two unequal parts that the ratio of the bigger part to the smaller one is the same as the ratio of the whole segment to the bigger part. It is necessary to transform the proportion of the golden division of segment into the quadratic equation in order to determine the golden number.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

$$x^2 = a(a-x)$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \qquad \sqrt{\Delta} = a\sqrt{5}$$



$$x_1 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$x_2 = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$$

Between the two results of the equation we choose only the one which is a positive number, obviously: $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$

Then we calculate the ratio of the segment length to the length of its bigger part:

$$\frac{a}{x} = \frac{2a}{a(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi}$$

This way we manage to determine the golden number. Its value equals $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ which approximately amounts to 1,6184...

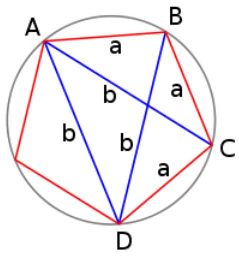
We can achieve this value by means of a chain fraction but we ought to remember that the longer the fraction the more precise approximation of the golden number we get.

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}$$

The golden number has a few very interesting characteristics. In order to find its converse we only need to take away one from it. In order to square it, we only need to add one to it.

There are numerous examples of the golden number and the golden division of segment in geometry. The following are just a few of them:

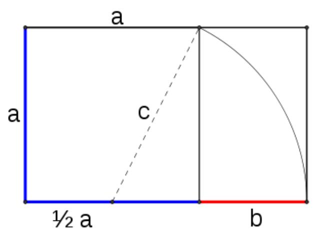
REGULAR PENTAGON



- the point of the diagonal cross constitutes their golden division
- the diagonal remains in golden ratio with the pentagon's side

The golden ratio in a regular pentagon was discovered and proven by Hippasus in the V century B.C.

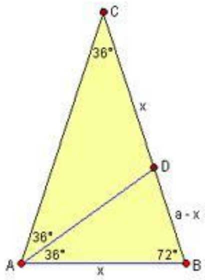
GOLDEN RECTANGLE



- its sides remain in golden ratio
- if we draw a square on it whose side is equal to the longer side of the rectangle, we obtain a new, bigger golden rectangle
- if we cut off a square with a side equal to the shorter side of the rectangle from the golden rectangle, we obtain a rectangle whose sides still remain in golden ratio.

GOLDEN TRIANGLE

- the ratio of a triangle's arm to its base is equal to the golden number



REGULAR ICOSAHEDRON

- the apexes of three perpendicular to one another golden rectangles drawn in a regular icosahedron can be found in twelve apexes of this polyhedron

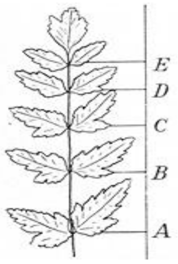
The connection of the golden number with the Fibonacci's sequence is very interesting. This sequence was defined by the Italian mathematician – Leonardo Fibonacci, who lived at the turn of the XII and XIII centuries, in the following way: the first two numbers are ones and each consecutive number is the total of the two preceding ones 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144.... the relation of every two consecutive numbers in Fibonacci's sequence become closer and closer to the value of the golden number as the sequence increases.

Harmony and perfection resulting from the golden division can be seen in many works of art. The Greek Parthenon serves as the best example. The ratio of its height to its width is the same as the ratio of its width to its length.

The parts of human body are also subject to the law of the golden division.

The Greek statue from the II century, which is a copy of the original statue sculpted by Leochares in IV century B.C. is the best example of this law. The first line divides the whole form into two parts according to the golden ratio. Line E shows the golden ratio between the head and the upper part of the torso. Line O indicates the leg division at a height of knees according to the golden cut.

The observation of nature leads to very interesting conclusions concerning the relationship of mathematics with botany.



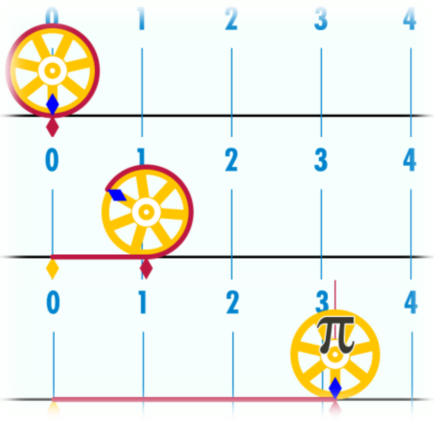
The golden division of segment can, for example, be noticed in the arrangement of leaves on a plant stalk. Between every two pairs of leaves on the same stalk the third pair is situated in the place of the golden cut. This peculiar symmetry in the arrangement of leaves (filotaksis) has been the subject of extensive research for hundreds years. The researchers report that we can find the closely related to the golden number Fibonacci's sequence in many plants. For example, sunflower seeds create spirals in two directions, but the numbers of these spirals are the successive terms of this sequence. The scales on the cones on many plants and on the pineapple fruit are arranged in a similar way.

The Italian physicist, astronomer and philosopher Galileo once said:

"*Mathematics is the alphabet by means of which God described the universe*".

The phenomenon of this number is the best proof of these words.

Π Number



The Pi number (π) is a mathematic constant defined as the ratio of the length of a circle to its diameter.

It amounts approximately to 26 535 3.14159 89 793 .... However, considering the fact that it is an irrational number, it is usually rounded to 3.14. Nevertheless, in practice it is enough to know eight digits of the decimal expansion, what gives sufficiently accurate results in the calculation. π can also be defined in other ways, such as an area of a circle with a radius equal to 1 or as the smallest positive value of x, for which sin(x) = 0 . The most popular way to remember the π value is learning a short rhyme, in which a number of letters in each following word is equal to the digit of the π number. This kind of rhymes are known in many languages, e.g. in English:

How I wish I could recollect pi easily today!
Sir, I have a rhyme excelling,
In mystic power and magic spelling,
Mystical spirits elucidate,
For my own problems can't relate.

History

The π symbol was introduced in 1706 by the English mathematician William Jones in his book Synopsis Palmariorum Matheseos. The π number is irrational (which means it's impossible to express it as a quotient of two integers) and transcendental number (which implies that no finite sequence of algebraic operations on integers - powers, roots, sums, etc. - can be equal to its value). Consequently, we cannot make a classical construction (using only ruler and compass) of a square with the surface equal to the surface of a circle.

A history of the π number is very interesting. People knew this constant even in antiquity. They observed that the ratio of circumference and diameter of a circle is a constant value. The Babylonians evaluated it in about 2000 BC as a number equal

to 3, and at the same time Egyptians expressed it as $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$.

In the III century BC, Archimedes defined it as about $\frac{22}{7}$.

and five centuries later Claudius Ptolemy , the Greek mathematician, as $\pi \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}$.

Nowadays, to calculate the value of the Pi number, we use the ollowing formula:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

The Pi number is infinite. With the time people were getting more and more precise in defining its value. The record-holder in hand-calculation was William Shanks. He charged 707 places after the decimal point in 1874. It took him 15 years! Later, it turned out that the last 180 digits were incorrect.

On 31.12. 2009 Fabrice Bellard, using a computer, appointed 2 699 999 990 000 digits after the decimal point . Calculation and checking its correctness lasted 131 days. In 2010 we got to know 2 000 000 000 000 000th digit and it is 0. To figure it out took much shorter- only 23 days.

DID YOU KNOW...?

A 60-year-old Japanese memorized by heart 100 thousands digits of the Pi number;

The π number has a lot of fans. They celebrate The Pi Day on the 14th of March (an American system of expressing date: 3.14) and The Approximation Day of Pi on the 22nd of July (an European system of expressing date : 22/7=~3.1428).

In The Great Pyramid of Giza the ratio of a sum of two sides of its base to its height is 3,1416 , what gives us the Pi number approximately to four digits after the decimal point. Nowadays we can't say if it was an amazing incident or planned effect of unknown by name geniuses.

The scientists, hoping to contact the extraterrestrial civilizations, sent into the universe radio signal with a value of π. They believe that intelligent beings know this number and will be able to read our message.

The Pi number is often called "Ludolph's Constant after the German mathematician Ludolph van Ceulen, who in 1610 estimated an approximation of π number accurate to 35 places of decimal extension.

BASIC FORMULAS USING PI NUMER:

- Circumference of a circle with a radius r: .... $C=2\pi r$
- area od a circle with a radius r: .... $A=\pi r^2$
- area of the ellipsis with semi-axes equaling a and b: .... $A=\pi ab$
- volume of a sphere with a radius r: .... $V=(4/3)\pi r^3$
- sphere surface with a radius r: .... $S=4\pi r^2$
- arc measure of the straight angle :.. π of the radians

SUDOKU

HISTORY:

Number puzzles appeared in newspapers in the late 19th century, when French puzzle setters began experimenting with removing numbers from magic squares. Le Siècle, a Paris-based daily, published a partially completed 9×9 magic square with 3×3 sub-squares on November 19, 1892. It was not a Sudoku because it contained double-digit numbers and required arithmetic rather than logic to solve, but it shared key characteristics: each row, column and sub-square added up to the same number.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Number puzzles appeared in newspapers in the late 19th century, in France.

On July 6, 1895, Le Siècle's rival, La France, refined the puzzle so that it was almost a modern Sudoku.

It simplified the 9×9 magic square puzzle so that each row, column and broken diagonals contained only the numbers 1–9, but did not mark the sub-squares. Although they are unmarked, each 3×3 sub-square does indeed comprise the numbers 1–9 and the additional constraint on the broken diagonals leads to only one solution.

These weekly puzzles were a feature of French newspapers such as L'Echo de Paris for about a decade but disappeared about the time of the First World War.

According to Will Shortz, the modern Sudoku was most likely designed anonymously by Howard Garns, a 74-year-old retired architect and freelance puzzle constructor from Indiana, and first published in 1979 by Dell Magazines as Number Place (the earliest known examples of modern Sudoku). He died in 1989 before getting a chance to see his creation as a worldwide phenomenon.It is unclear if Garns was familiar with any of the French newspapers listed above.

The puzzle was introduced in Japan by Nikoli in the paper Monthly Nikolist in April 1984as Sūji wa dokushin ni kagiru (数字は独身に限る[?]), which can be translated as "the digits must be single" or "the digits are limited to one occurrence." (In Japanese,"dokushin" means an "unmarried person".) At a later date, the name was abbreviated to Sudoku(数獨) by Maki Kaji (鍛治真起 Kaji Maki[?]), taking only the first kanji of compound words to form a shorter version. In 1986, Nikoli introduced two innovations: the number of givens was restricted to no more than 32, and puzzles became "symmetrical" (meaning the givens were distributed in rotationally symmetric cells). It is now published in mainstream Japanese periodicals, such as the Asahi Shimbun.

GENERALLY ABOUT SUDOKU:

Sudoku is a logic-based, combinatorial number-placement puzzle. The objective is to fill a 9×9 grid with digits so that each column, each row, and each of the nine 3×3 sub-grids that compose the grid contains all of the digits from 1 to 9. The puzzle setter provides a partially completed grid, which typically has a unique solution.

Completed puzzles are always a type of Latin square with an additional constraint on the contents of individual regions. For example, the same single integer may not appear twice in the same 9x9 playing board row or column or in any of the nine 3x3 subregions of the 9x9 playing board.

The puzzle was popularized in 1986 by the Japanese puzzle company Nikoli, under the name Sudoku, meaning single number. It became an popular in 2005.

Number puzzles appeared in newspapers in the late 19th century, in France.

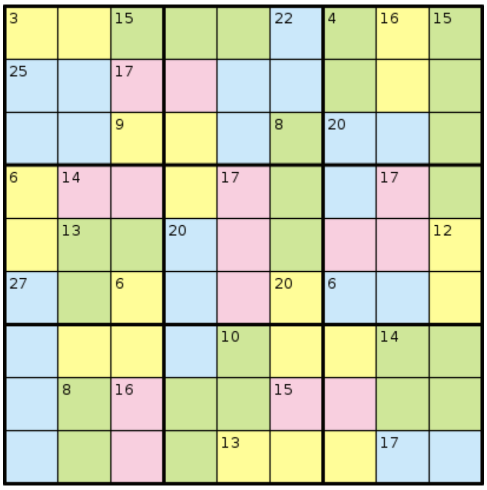
On July 6, 1895, Le Siècle's rival, La France, refined the puzzle so that it was almost a modern Sudoku.

It simplified the 9×9 magic square puzzle so that each row, column and broken diagonals contained only the numbers 1–9, but did not mark the sub-squares. Although they are unmarked, each 3×3 sub-square does indeed comprise the numbers 1–9 and the additional constraint on the broken diagonals leads to only one solution.

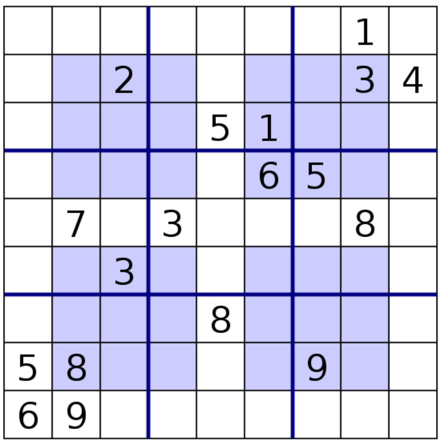
KILLER SUDOKU PUZZLE

The objective is to fill the grid with numbers from 1 to 9 in a way that the following conditions are met:

- Each row, column, and nonet contains each number exactly once.
- The sum of all numbers in a cage must match the small number printed in its corner.
- No number appears more than once in a cage. (This is the standard rule for killer sudokus, and implies that no cage can include more than 9 cells.)



HYPERSUDOKU PUZZLE



Hypersudoku is one of the most popular variants. It is published by newspapers and magazines around the world. The layout is identical to a normal Sudoku, but with additional interior areas defined in which the numbers 1 to 9 must appear(the blue ones). The solving algorithm is slightly different from the normal Sudoku puzzles because of the leverage on the overlapping squares. This overlap gives the player more information to logically reduce the possibilities in the remaining squares. The approach to playing is similar to Sudoku but with possibly more emphasis on scanning the squares and overlap rather than columns and rows.

MATH IN REAL LIFE

First of all, math can be used in a lot of ways: in everyday shopping, loans, share and stock exchange, architecture, economy, astronomy, passwords and informatics, encryption, the basics of programming, in factories for quality control (probability), and the weather forecast. In the following part we are going to explain the three most important applications.

PHYSICS

Today's technology requires a high level knowledge of physics, but it is based on high level mathematics. Perhaps the best example is the king of the technical sports, the Formula 1.

The designers of the teams are to find the proper balance between the weight, the strength and the price. The lighter a proper component, the faster the car is. But on the other hand, if it is too light, it means that there isn't enough material in it, which can cause its deformation. But mathematics is not only required at technical sports but also at the design of a simple house, because we have to know, how much material we need. Moreover sometimes we make some mistakes (with a proper chance), and then we need more material, so we have to order more material than we had estimated.

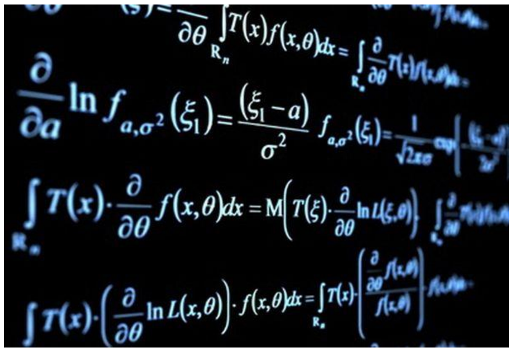
BUSINESS LIFE

Mathematics plays an important role in everyday and business life as well. In business, mostly just the simpler parts of mathematics are used: addition, subtraction, multiplication, division, percentage and interest calculations. There are a lot of numerical data to deal with in business: working hours, quantity of goods, workforce, and many more, but the most important, which is everywhere around us, is money.

In business, one of the most important aims is the profit, the entrepreneur's real gain, which moves the business life. In order to determine the profit a lot of operations should be performed. We have to calculate our total revenue and total expenditure, as the difference between the two determines our profit. If it is positive then it is good, if it is negative then we have to find out how it could be positive. The calculation of the revenue for a given period (usually one month or one year) is not as difficult as the calculation of the expenditure. To calculate the total revenue, we only have to sum the received money after the sold goods or services.

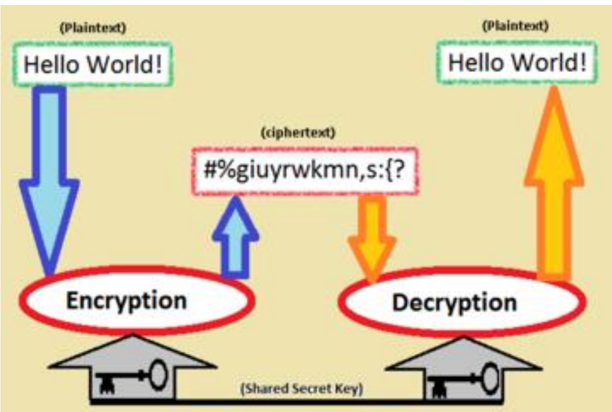
The calculation of the expenditure is more complicated. Let me give a simple enterprise's expenditures as an example, only broadly. Let's say, we have a popcorn vending business. In order to be able to start selling, popcorn, popcorn-making machines are needed. To buy all these machines we need initial capital. Sources of initial capital might include personal funds, bank loans, grants, or credit from suppliers. Once we have the machines, we need the staff, the people who produce and sell. They can have a wage which might be fixed monthly, or it can be calculated after the working hours multiplied with the hourly wage. The staff costs are not only the wages, they may have benefits, and the employer must pay taxes after each employee, the amount of the taxes is a certain percentage, depending on the wage rate. Now we have machines and staff too, but we still need the product, that is the popcorn, which can be sold. The popcorn consists of the ingredients: corn and seasonings, but different sized bags, and napkins are also needed.

The price of the product is calculated on how much the ingredients cost. The price itself should be higher than the costs, because from the whole revenue of the sold popcorn in a month, we have to subtract the price of the production, the money paid to the workers, to the creditors and investors and the 20% VAT too. Well, the question of VAT (Value Added Tax) is a very important part of the price of the product. The product itself has two prices, the gross and the net price. The net price is the final price after deducting all discounts and rebates that is the money that the selling company gets. The gross price is paid by the customers in e.g. a shop and it includes a 20% VAT (in Hungary), which is paid by the company to the State. In Hungary the VAT is 25% percent, this means that if we want to get 200HUF after a middle-sized bag of popcorn the retail price has to be 250HUF (with 20% included VAT) because in the end of the month the whole company has to pay the 20% of the total monthly revenue. After the subtractions the money left is our profit, which we make our living from, and also use to develop our company.



When the profit of the business is calculated, then it is presented to the managers, investors, owners, as the future development and changes of making the company much more useful, and profitable is based on it. For such presentations, tables, graphs and charts are used to illustrate the above-mentioned statements.

INFORMATICS

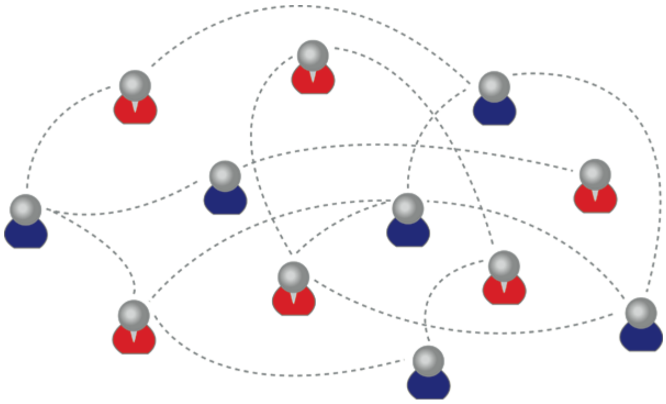


Another important Science section is cryptography and it uses Math. Modern cryptography intersects the disciplines of mathematics, computer science, and electrical engineering. Applications of cryptography include ATM cards, computer passwords, and electronic commerce.

The modern field of cryptography can be divided into two areas of study: Symmetric-key cryptography and Public-key cryptography.

Symmetric-key cryptography refers to encryption methods in which both the sender and receiver share the same key

A significant disadvantage of symmetric ciphers is the key management has to be safe. Each distinct pair of communicating parties must, ideally, share a different key, and perhaps each cipher text exchanged as well. The number of keys required increases as the square of the number of network members, which very quickly requires complex key management schemes to keep them all straight and secret. But there is another way.



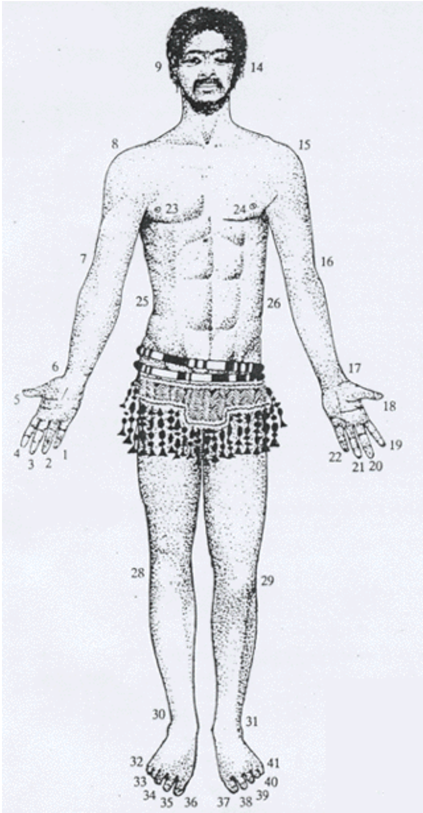
Public-key algorithms are most often based on the computational complexity of "hard" problems, often from number theory. For example, the hardness of RSA is related to the integer factorization problem Because of the difficulty of the problem, most public-key algorithms involve operations such as multiplication and exponentiation, which are much more computationally expensive than the techniques used in most block ciphers. As a result, public-key cryptosystems are commonly hybrid cryptosystems, in which a fast high-quality symmetric-key encryption algorithm is used for the message itself, while the relevant symmetric key is sent with the message, but encrypted using a public-key algorithm.

MATEMATYKA W CZASACH PREHISTORYCZNYCH

Liczenie jest dziś czynnością codzienną. Liczby występują w różnych postaciach i służą do różnych celów. Podstawą liczenia są cyfry 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, które łączy się na wiele sposobów.

Dawniej jedynymi liczebnikami były słowa „jeden", „dwa", "wiele" używane w różnych kombinacjach. Na przykład, aby wyrazić liczbę 5, ludzie musieli powiedzieć 2,2,1. Aby wyrazić liczbę powyżej 6 trzeba było powiedzieć „wiele". Natomiast zbiory przedmiotów ustawiano w pary. Na przykład zwierzęta na pastwisku grupowano parami. W ten sposób ludzie mogli liczyć przedmioty niezależnie od ich rodzaju.

Pierwszymi przyrządami do liczenia były palce jednej ręki, a później dwóch. Z czasem powstała potrzeba zapisywania liczb. Początkowo wykonywano prymitywne rachunki. Zaczynało się od różnego rodzaju nacięć. Przykładowo prehistoryczny pasterz musiał policzyć 88 owiec. Siadał niedaleko jaskini mając kawałek kości i krzemień. Każde przejście pojedynczej owcy powodowało, że robił jedno nacięcie więcej. Sprawdzając nacięcia, łatwo mógł zobaczyć, czy całe stado powróciło do domu. Inny sposób liczenia polegał na dotykaniu się w odpowiednie części ciała, co przedstawione jest na rysunku. Następnie prawdopodobnie pojawiło się liczenie grupami. Na przykład pięć patyczków grupowano w wiązki, a wiązki w kupki itd. Jest to początkiem dzisiejszych tuzinów i grosów.

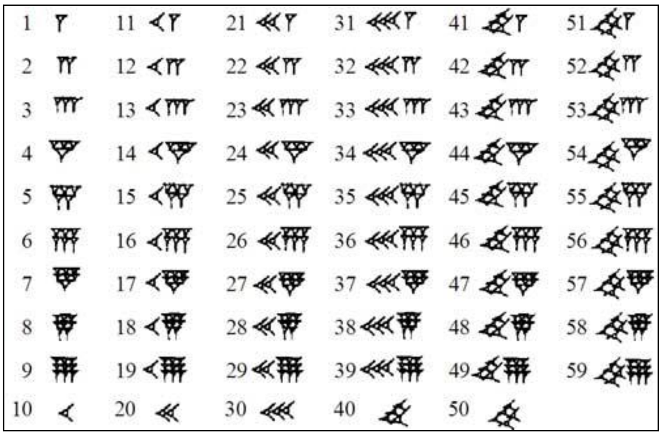


Umiejętność liczenia wykorzystywana była również do dokonywania rozmaitych pomiarów. Rozmiary przedmiotów mierzono porównując je z różnymi elementami ciała. Na przykład cal, piędź (odcinek między końcami kciuka i małego palca), stopa, łokieć. Objętość ciał mierzono objętością naczyń, w których je przechowywano. Odległość mierzono takimi jednostki jak krok czy bruzda. Z czasem następowało uśrednienie tych naturalnych jednostek, ponieważ nie każdy łokieć czy stopa są jednakowej długości.

Potrzeba liczenia, mierzenia, czy ważenia towarzyszyła człowiekowi od tysięcy lat. Dziś nie wyobrażamy sobie życia bez znajomości liczb, dlatego warto zwrócić uwagę na prehistoryczne ludy, które musiały sobie bez nich radzić. Wykazali się oni pomysłowością i sprytem w dziedzinie rachunków. Pamiętajmy również, że dzięki tym prymitywnym metodom matematyka rozwinęła się do takiego stopnia jaki znamy obecnie. Ci prehistoryczni matematycy są ojcami tej dziedziny nauki. Nie zdawali sobie nawet sprawy z tego, jak wielkich odkryć dokonują i jaki wpływ będą one wywierać na przyszłe pokolenia. Możemy ich wręcz nazywać geniuszami. Stworzyli coś, co jak nam się może dzisiaj wydawać istniało od zawsze.

MATEMATYKA W STAROŻYTNEJ MEZOPOTAMII

Wiele wiemy obecnie na temat poziomu matematyki w starożytnej Mezopotamii. Stało się to za sprawą wypalanych glinianych tablic pokrytych pismem klinowym, które dzięki suchemu klimatowi zachowały się aż do dnia dzisiejszego. Część historyków utrzymuje, że ogrom wiedzy matematycznej świata antycznego, sięgającego od Rzymu po Chiny, miał swoje korzenie właśnie w Mezopotamii. Mieszkańcy starożytnej Mezopotamii byli jedną z czterech cywilizacji, które rozwinęły system liczbowy (wraz z Hindusami, Majami oraz mieszkańcami Chin). Jednakże istnieje zasadnicza różnica pomiędzy ich systemami liczbowymi, a tymi stosowanymi obecnie: w Mezopotamii nie znano zera, które wprowadzono prawdopodobnie w Indochinach lub Indiach w VII wieku p.n.e.



Nawet bez zera system liczbowy znany w Mezopotamii dawał wiele możliwości, w tym użycia prostych algorytmów do przeprowadzenia podstawowych obliczeń arytmetycznych. Ponadto podjęto próby wyrażania liczb mniejszych niż jeden, tak jak to obecnie czynimy z liczbami dziesiętnymi.

Mieszkańcy Mezopotamii opracowali również praktyczny sposób wyznaczania pierwiastków kwadratowych. W gruncie rzeczy tą samą metodę nadal stosuje się w niektórych szkołach, na przykład w USA, chociaż naturalnie obliczenia wykonywane są na różnego rodzaju kalkulatorach. Potrafili oni również rozwiązywać równania kwadratowe, a także niektóre sześcienne.

Zwykło mawiać się, iż Mezopotamczycy byli dobrzy w algebrze, chociaż słabi w geometrii. Później odkryto, że jako pierwsi znali twierdzenia zwane twierdzeniami Pitagorasa i Talesa (możliwe, że podróżując w tamte regiony Pitagoras i Tales zetknęli się z tymi teoriami).

Prawdopodobnie krytyka znajomości geometrii w starożytnej Mezopotamii wiąże się z tym, iż według niektórych źródeł liczbie π przypisywali wartość 3. Późniejsze odkrycia pokazały jednak, iż przynajmniej część osób zajmujących się matematyką w tych czasach przypisywało jej wartość 3,125, czyli zbliżoną do tej używanej przez im współczesnych w starożytnym Egipcie.

MATEMATYKA W STAROŻYTNYM EGIPCIE

W starożytnym Egipcie matematycy posługiwali się językiem egipskim, który w okresie hellenistycznym został zastąpiony przez grecki. W wyniku tej zmiany egipscy, babilońscy i greccy naukowcy zapoczątkowali dziedzinę nauki zwaną matematyką hellenistyczną. Następnie Arabowie działali według jej zasad, wprowadzając jej części do matematyki muzułmańskiej, w konsekwencji czego arabski stał się językiem egipskich uczonych.

SYMBOLE LICZBOWE

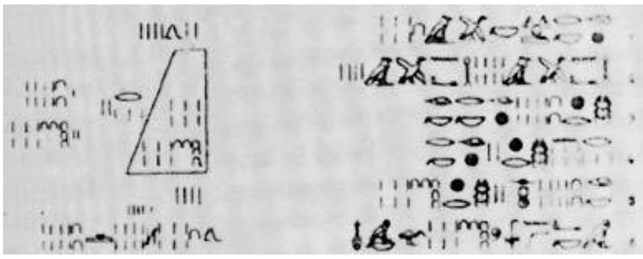
Znane są zapiski liczbowe starożytnych Egipcjan, utrwalone na papirusach sprzed 4 tysięcy lat. Powstały one w oparciu o prosty system, który można łatwo zrozumieć. Egipcjanie liczyli w systemie dziesiętnym, lecz bez wielkości algebraicznej. Istniały specjalne znaki dla liczb takich jak jeden, dziesięć, sto i tysiąc, z których następnie składane były liczby i zapisywane od prawej do lewej. To uproszczenie miało oczywiście swoją cenę, liczby, które z nich postawały były bardzo długie i w konsekwencji trudne do odczytania.

1	𓏺	pociągnięcie długopisu
10	𓎆	strzemię (pętlica)
100	𓍢	rolka liny
1 000	𓆼	kwiat lotosu
10 000	𓂭	środkowy palec
100 000	𓆐	kijanka
1 000 000	𓁨	bóg nieskończoności

na przykład: 𓏺𓏺𓏺𓎆𓍢𓍢𓆼𓆼 = 2213

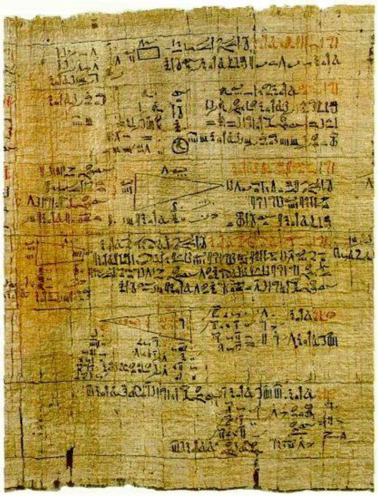
ŹRÓDŁA EGIPSKICH ZNAKÓW

Najstarszym matematycznym tekstem odkrytym dotychczas jest Papirus Moskiewski z czasów starożytnego Egiptu (pochodzący z okresu około 2000 do 1800 p.n.e.) który przechowany jest w Moskiewskim Muzeum Puszkina.



Zawiera on zadania tekstowe, podobne do większości innych starożytnych tekstów matematycznych, które wydają się być napisane dla rozrywki (zabawy). Jedno z zadań jest uważane za szczególnie istotne, ponieważ ukazuje metodę obliczania objętości niekompletnych ciał (pociętych).

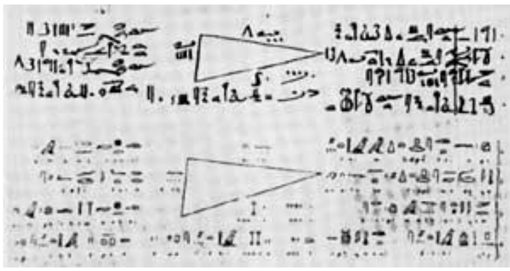
Papirus Rhinda (1650 p.n.e.), jest kolejnym ważnym tekstem matematycznym. Jest on ręcznie spisanym podręcznikiem do arytmetyki i geometrii, opracowanym przez egipskiego urzędnika Ahmesza. Dokument został nazwany papirusem Rhinda na cześć jego szkockiego odkrywcy. W podręczniku tym Ahmesz opisuje, między innymi, jak obliczyć pole gruntów rolnych w kształcie trapezu (trójkąt z odciętym czubkiem), czy objętość piramidy. Można znaleźć tam także ułamki,



ciągi arytmetyczne i geometryczne oraz równania z jedną niewiadomą. Obecnie dokument ten przechowywany jest w Londynie.

Jest on dowodem na znajomość formuł obszarowych, mnożenia, metod dzielenia, a także opanowania operacji na ułamkach, znajomości liczb pierwszych i złożonych, arytmetyki, geometrii i obliczania średniej harmonicznej. Opisuje on także sito Eratostenesa – w uproszczonej formie, teorię liczby doskonałej (którą jest cyfra 6), pokazuje jak rozwiązać równania liniowe oraz działania na ciągach arytmetycznych i geometrycznych.

Trzy formy geometryczne występujące na papirusie Rhinda wskazują, że Egipcjanie znali podstawowe zasady geometrii analitycznej, takie jak:



(1) sposób wyznaczenia liczby π z marginesem błędu w granicach 1 %

(2) rozwiązywanie problemu kwadratury koła

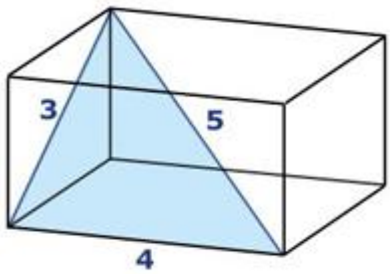
(3) użycie funkcji cotangens

Cylinder (walec), jako pojemnik na ziarno, również pojawił się na tym papirusie. Dowodzi to, że ówcześni matematycy byli w stanie obliczyć objętość walca, sześcianu i prostopadłościanu. Liczyli oni powierzchnię koła ze wzoru : $t = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$, gdzie d oznacza średnicę koła. Pracowali oni także z liczbą 256/81 = 3,1605 zamiast π, która jednakże jest bliska rzeczywistej wartości π.

Wreszcie Papirus Berliński, który dowodzi że rozwiązywanie równań algebraicznych kwadratowych było znane matematykom w starożytnym Egipcie.

INNE CIEKAWOSTKI

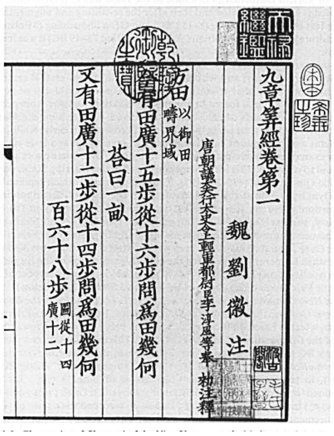
W piramidzie Cheopsa możemy odnaleźć „złotą proporcję” na przykładzie rozmiarów pokoju królewskiego, gdzie odnajdziemy Pitagorasowskie cyfry 3,4,5.



MATEMATYKA STAROŻYTNYCH CHIN

Matematyka starożytnych Chin nie jest dobrze znana, ponieważ w 212r. p.n.e. cesarz Chin Qin Shi Huang rozkazał spalić wszystkie książki za wyjątkiem tych, znajdujących się w miasteczku Qin. Panowało ono nad Chinami podczas rządów dynastii Qin Shi Huang. W książkach, które uniknęły nakazu spalenia zachowało się jednak niewiele informacji o matematyce tamtych czasów.

Najstarszym dokumentem stanowiącym kompendium wiedzy tamtego okresu jest rozprawa zatytułowana „Matematyka w IX księgach". Jest to zbiór 246 zadań sformułowanych w następujący sposób: treść, odpowiedź i rozwiązanie. Jedna z ksiąg zawiera zadanie rozwiązane metodą „fang-czeng". Jest to sposób rozwiązywania układów n równań liniowych z n niewiadomymi, który przypomina dzisiejszą metodę wyznaczników Cramera. Nazwa „fang-czeng" pochodzi od sposobu wykonywania obliczeń algebraicznych, który polegał na stosowaniu odpowiednio pokratkowanych tablic matematycznych.



九章筭經卷第一

魏 劉徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉敕注釋

以御田疇界域

有田廣十五步從十六步問爲田幾何

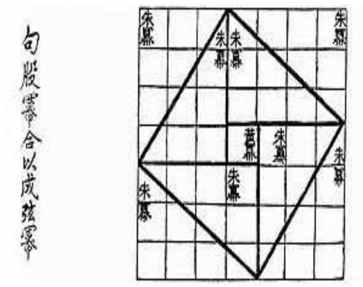
荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

荅曰百六十八步 圖從十四廣十二

Najstarszym chińskim tekstem dotyczącym matematyki jest „Zhoubi suanjing", który powstał w okresie pomiędzy 100 r. p.n.e. do 100 n.e. Zawiera on zasadę Gougu, która jest powtórzeniem twierdzenia Pitagorasa. Pokazane są tam obliczenia na ułamkach ze wspólnym mianownikiem.

Kolejnym znaczącym tekstem jest „Rozprawa o pręcie mierniczym" (tytuł angielski: „The Treatise of Measuring Rod"), który głównie dotyczy zagadnień z dziedziny astronomii, ale również odwołuje się do twierdzenia Pitagorasa.



Pytaniem pozostaje, czy starożytni Chińczycy sami doszli do sformułowania twierdzenia przypominającego twierdzenie Pitagorasa, czy wiedzę o tym zagadnieniu zaczerpnęli od innych kultur?

Następną książką, której nie spalono jest rozprawa pod tytułem „Mo Jing", napisana ok.330r. p.n.e. przez kontynuatorów filozofa Micius'a (470-390 p.n.e.). Poświęcona jest głównie geometrii, ale porusza także wiele innych kwestii matematycznych i fizycznych. Około IV w. p.n.e popularną metodą wykonywania działań matematycznych było liczenie na patyczkach. Opierano się na systemie dziesiątkowym, gdzie każdą 10 oznaczano jakimś symbolem. Puzzle, zagadki, magiczne kwadraty były powszechne w tamtych czasach.

Jednym z najważniejszych odkryć matematycznych Chińczyków jest system dziesiątkowy powszechnie stosowany również dzisiaj. Powstał w epoce Shang (1600 p.n.e – 1046 p.n.e.). Najstarszy zachowany zapis tego systemu to skorupa żółwia z wyrytymi znakami „123", którym odpowiadają:

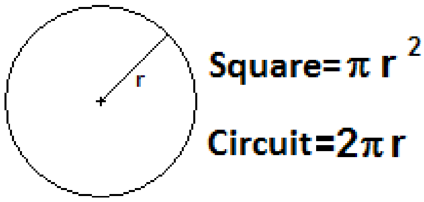
1 – setki, 2 – dziesiątki, 3 – jedności. Było to największe osiągnięcie matematyczne tamtych czasów.

Kolejnym krokiem w rozwoju tej dziedziny nauki było wynalezienie przyrządu o nazwie „suanpan”, odpowiednika dzisiejszego liczydła. Składał się on z dwóch części. W jednej części znajdowało się pięć kulek, a w drugiej trzy. Wartość każdej kulki z drugiej części była równa co do wartości pięciu z pierwszej części. Znaczyło to, że jeżeli wartość kulki w pierwszej części wynosiła 1, to wartość każdej kulki w drugiej części była równa 5. Przyrząd służył szybkiemu wykonywaniu działań matematycznych takich jak: dodawanie, odejmowanie, dzielenie, mnożenie, obliczanie pierwiastków kwadratowych i sześciennych.

Bardzo ważnym chińskim osiągnięciem były liczby ujemne. Aby odróżnić je od dodatnich Chińczycy zapisywali je kolorami – czarny (liczby ujemne), czerwony (liczby dodatnie). Dodatkowo nadawano im różne nazwy. Pierwsze nazywane były „fu”, a drugie – „czeng” (nazwy pochodzą od metody „fu-czeng”).

Wcześniej niż liczby ujemne odkryto ułamki zwykłe. Używano symboli: $\frac{1}{2}$ (połowa), $\frac{1}{3}$ (mała połowa) i $\frac{2}{3}$ (duża połowa).

Innym osiągnięciem starożytnej matematyki chińskiej jest odkrycie liczby π przez Liu Hui (III wiek n.e.). Jej wartość wyliczył na 3,14159. W V wieku n.e. Zu Chongzhi i jego syn Zu Gengzhi określili jej wartość do dziesiątego miejsca po przecinku: 3,1415929203.



W 1303 roku chiński matematyk, Zhu Shijie napisał książkę o angielskim tytule „Valuable Mirror of Four Elements” (oryginalny tytuł: „Szu – yu Yu – chien”). To było największe osiągnięcie chińskiej algebry. Zawierała ona wiele metod rozwiązywania równań nawet 14 stopnia (dzisiaj korzystamy z tak zwanego schematu Horner'a). Pojawia się w niej również znane wcześniej (około 1100 n.e.) twierdzenie dotyczące własności liczb w trójkącie. Jego odpowiednik pojawił się w Europie dopiero w XVII wieku za sprawą Błażeja Pascala (od jego nazwiska określanego mianem „trójkąt Pascala”).

Chińscy matematycy używali różnych algebraiczno - geometrycznych przekształceń. Umieli rozwiązywać równania kwadratowe, obliczać resztę z dzielenia i pola prostych figur (tj.: prostokąta, trójkąta, okręgu, trapezu, wycinku koła i koła zakładając, że π=3). Używali sytemu rachunkowego podobnego do dzisiejszego, przy czym nie używano zera. W miejscu zera zostawiano puste miejsce.

Tabliczka mnożenia wzbudzała taką ciekawość, że podczas egzaminu z matematyki zdawanego przez urzędników administracji państwowej przybrał formę egzaminu śpiewanego; być może znane powiedzenie: „Zaliczyć śpiewająco” miało swój początek właśnie w Chinach.

MATEMATYKA W STAROŻYTNEJ GRECJI

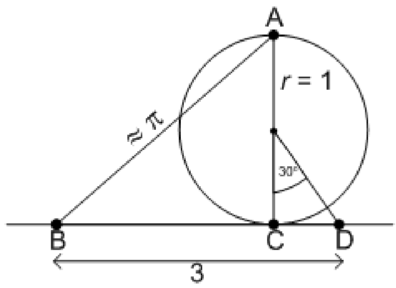
GRECCY I HELLENISTYCZNI MATEMATYCY (550R. P.N.E. – 300R. N.E.)

Wszyscy reprezentacji greckiej i hellenistycznej matematyki, pomimo, że żyli na wschodnich wyspach Morza Śródziemnego połączyli swoje wszystkie osiągnięcia w jedną całość. Stworzyli matematykę bardziej wyszukaną i użyteczniejszą, używając do tego nowych metod, których nikt nie posiadał do tej pory.

CZTERY WYBITNE PROBLEMY GEOMETRII

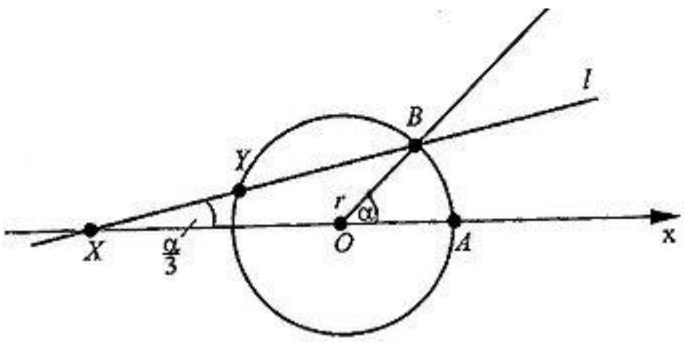
I. KWADRATURA KOŁA:

Problem polegający na skonstruowaniu kwadratu, którego pole równe jest polu danego koła, przy użyciu wyłącznie cyrkla i linijki bez podziałki. Jest to jeden z trzech wielkich problemów starożytnej matematyki greckiej, niemożliwy do wykonania, co zostało udowodnione dopiero w 1882r. przez Ferdinand von Lindemann, który ukazał liczbę π



jako liczbę przestępną :

II. TRYSEKCJA KĄTA:

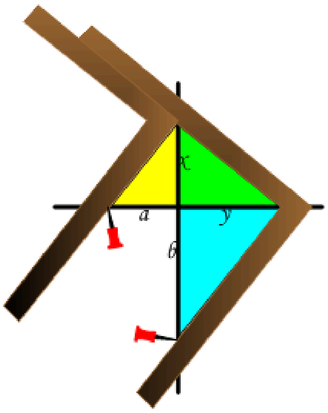


Grecy uważali, że jest to niemożliwe do zrobienia metodą linijki i cyrkla, lecz nie zostało to udowodnione do czasów nowożytnych. By dokonać trysekcji kąta ostrego można wykorzystać mniej dokładną konstrukcję Archimedesa. Używa się do niej cyrkla i linijki z zaznaczonymi dwoma punktami X i Y. Najpierw należy nakreślić okrąg o środku O (gdzie O - wierzchołek kąta) i promieniu r = | XY | . Punkty przecięcia okręgu z ramionami kąta oznaczyć jako A i B. Następnie poprowadzić prostą OA oraz prostą l za pomocą linijki tak, aby jeden z zaznaczonych na niej punktów X należał do prostej OA, zaś drugi - punkt Y do okręgu i tak by prosta l przechodziła przez punkt B. Wówczas proste OA i l przetną się pod kątem. $\frac{\alpha}{3}$

III. KONSTRUKCJA SIEDMIOKĄTNA FOREMNEGO:

Niemożliwy do skonstruowania za pomocą cyrkla i linijki. Ma dwa razy więcej przekątnych niż boków.

IV. Podwojenie sześcianu



Podwojenie sześcianu polegające na zbudowaniu sześcianu o objętości dwa razy większej niż dany. Legenda mówi, że w czasie zarazy na Delos wyrocznia delficka przekazała proroctwo Apolla, że choroba ustanie, gdy jego ołtarz w świątyni w Delfach zostanie powiększony dwukrotnie. Zrozumiano to w ten sposób, że należy dwukrotnie powiększyć objętość ołtarza, zachowując jego kształt sześcianu. Klasyczne rozwiązanie problemu przy pomocy cyrkla i linijki nie jest możliwe; problem może jednak być rozwiązany przy pomocy metod nieklasycznych.

W języku algebry problem podwojenia sześcianu sprowadza się do zbudowania odcinka x spełniającego równanie $x^3 = 2a^3$, gdzie a jest dane. Przyjmując a za jednostkę, problem sprowadza się do zbudowania pierwiastka 3 stopnia z liczby 2. Nie jest to jednak możliwe: $\sqrt[3]{2}$ jest liczbą algebraiczną stopnia 3, podczas gdy teoria mówi, że dana liczba daje się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki wtedy i tylko wtedy, gdy jej stopień nad ciałem liczb wymiernych jest naturalną potęgą liczby 2. (a:x=x:y=y:b)

Pitagoras “ojciec liczb” (582 – 496r.p.n.e.)

Był jońskim filozofem przyrody, matematykiem astronomem i muzykiem. Założył Szkołę Pitagorejską w Kroton. Traktowany był tam z niebiańskim szacunkiem, sam twierdził, że wśród istniejących stworzeń są bogowie, ludzie i istoty podobne do Pitagorasa. Uczniowie Pitagorasa swoje dzieła często przypisywali mistrzowi, dzięki czemu otrzymywały one wyższą rangę i były poparte autorytetem wielkiego filozofa. Podobnie mogło być ze słynnym twierdzeniem Pitagorasa nazwanym jego imieniem. Najprawdopodobniej, w znanej obecnie formie, nie zostało sformułowane przez niego, lecz przez jednego z przedstawicieli szkoły pitagorejskiej. Wiadomo ponadto, że twierdzenie to było stosowane wcześniej.

Tales (624-546r. p.n.e.)

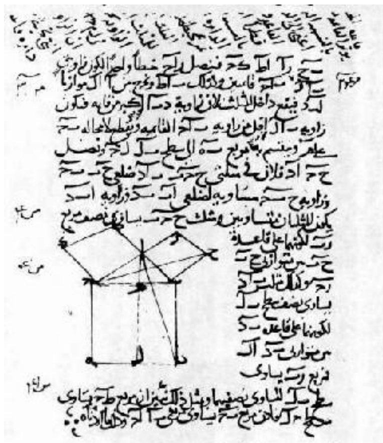
Był matematykiem, filozofem i astronomem. Jeden z pierwszych matematyków, którego imię przetrwało. Podróżował po rejonach świata znanych w tamtych czasach, pracował również jako polityczny doradca, założył szkołę jońskiej filozofów przyrody. Żadna z jego prac nie przetrwała w oryginale, znamy je z innych dzieł. Przedstawił koncepcję kątów w matematyce. Był twórcą twierdzenia nazwanego jego imieniem, czyli twierdzenie Talesa.

Archimedes (287-212r.p.n.e.)

Jeden z wielkich matematyków w historii. Był również fizykiem astronomem i filozofem. Ostatnią część swojego życia spędził na dworze księcia Syrakuz, gdzie służył mu swoją pomocą. Zginął podczas oblężenia na miasto, rozgniewany, rzymski żołnierz zadał mu śmiertelny cios po słynnych słowach Archimedesa: „Nie zamazuj moich kół”. Rozszerzył tu system liczbowy Greków, a jego największą liczbą była liczba 1063. Podał zaokrąglenie liczby Π do 22/7 czyli 3,14, taki zapis był używany nawet w czasach średniowiecza. Był zafascynowany kulą stożkiem i walcem, a na dowód szacunku do jego osoby Rzymianie wyryli te bryły na jego grobie.

Matematyka Arabska

Etapy rozwoju matematyki arabskiej:


An early Arabic translation of the Pythagorean theorum.

1. Dotarcie do osiągnięć matematyków greckich, egipskich i hinduskich i ich tłumaczenie na arabski zajęło cały VIII wiek. Ten okres nazywa się okresem *Abbászida*. W ośrodku naukowym w Bagdadzie uczeni mieli do swojej dyspozycji pokaźną bibliotekę i obserwatorium astronomiczne. Swoistym centrum naukowym było miasto Cordoba na Półwyspie Iberyjskim.
2. IX w. to czas formułowania komentarzy do uprzednio tłumaczonych rozpraw. To właśnie pisanie komentarzy zapoczątkowało oryginalną myśl arabską w dziedzinie ówczesnej matematyki. Wśród najważniejszych matematyków tego okresu można wymienić takie postaci jak: Al-Hvárizma, Al-Kindi, Szábit Ibn, Kurra, czy Al-Mahani. Jest to czas rozwoju takich dziedzin matematyki jak arytmetyka, geometria, trygonometria oraz metody aproksymacji.
3. Chociaż w centrum uwagi matematyków znajduje się trygonometria i metoda aproksymacji, nadal rozwijana jest algebra. W tym okresie do najważniejszych postaci w dziedzinie matematyki zalicza się takich uczonych jak: Abul-Vafa, Al-Karadzsi, Al-Brúni, Omar Hajjám, Abu-Kámil i Al-Battáni.
4. W okresie obejmującym wiek od XIII do XV, pod silnym wpływem Chińczyków, na ważności zyskują metody numeryczne. Wśród wiodących matematyków znajdują się tacy uczeni jak: At-Túszí, Al-karhi, Al-magribi, Ibn Al-Haiszan i Al Kalaszádi.

Najważniejsi matematycy:

Al-Battáni:

Rozwijał trygonometrię w kontekście astronomii. Urodził się w południowej Turcji, w miejscowości Harrána, a zmarł w Samarze, w dzisiejszym Iraku. Był członkiem sekty czczącej gwiazdy. Obserwacje astronomiczne prowadził w miastach Antiokhia i Arakta. Zachowało się tylko jedno z jego dzieł, którego tematem jest ruch gwiazd.

Jego zasługą jest rozpowszechnienie się w Europie hinduskiego pojęcia sinusa (cięciwa kata środkowego), które zyskało na większej popularności niż jego greckiego odpowiednik. Wprawdzie znał pozostałe funkcje trygonometryczne, ale to właśnie tę wykorzystał do zdefiniowania jednego z boków trójkąta prostokątnego w swoim dziele.

$$b = \frac{a \cdot \sin(90 - \alpha)}{\sin \alpha}$$

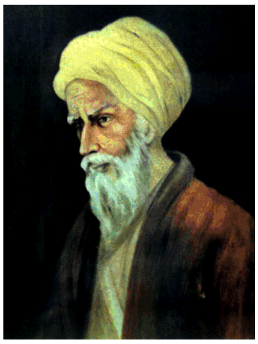
Gdzie “a” i “b” są bokami, natomiast “α” jest kątem leżącym na przeciw przyprostokątnej “a”. To równanie jest ważne, gdyż pokazuje, że w swoich początkach trygonometria całkowicie opierała się na funkcji sinusa. Prawie 100 lat później ten sam stosunek opisany został równaniem: $a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$.

Uczony ten zajmował się również problematyką trójkątów sferycznych. W jednym z jego dzieł znajdujemy wzór cosinusów trójkąta sferycznego. Wśród jego dokonań w dziedzinie astronomii wylicza się: lokalizację elementów orbity słońca, w miarę dokładne zdefiniowanie długości roku. Siedem wieków później posłużyła za podstawę kalendarza papieża Grzegorza XIII, który jest używany do dzisiaj W swoich obserwacjach astronomicznych był bardzo staranny, a posługiwał się instrumentami wykonanymi jeszcze przez jego ojca. Jego tabele astronomiczne używane były w Europie jeszcze przez długi czas po jego śmierci.

AL- BAGDÁDI:

Pozostawił potomnym dwa ważne odkrycia. Jednym jest obliczanie reszty. Drugie dotyczy wielkości podzielnych i niepodzielnych. W swych badaniach podejmował problematykę liczb niewymiernych drugiego stopnia, pojawiających się w 10 Księdze Euklidesa. Analizował je w sposób przypominający współrzędne kartezjańskie i dlatego zdobył przydomek poprzednika Kartezjusza.

IBN AL-HAISZAM AL HAZEN:



Największy fizyk w świecie arabskim w tamtym czasie. Urodzony w mieście Baszra, na terytorium dzisiejszego Iraku. Żył i pracował w Kairze. Chciał zwrócić na siebie uwagę egipskiego kalifa. Być może w ten sposób chciał zapewnić wsparcie dla swych poczynań badawczych. Może dlatego odważył się złożyć obietnicę zbudowania machiny, która będzie w stanie kontrolować wylewy Nilu. W tamtym czasie kalifem Egiptu był Al-Hákim, pochodzący z kapryśnej i żądnej krwi rodziny Faátimidá. Polecił Al-Haiszamowi rozpoczęcie prac nad regulacją Nilu, ale też zastrzegł "Jeżeli nie uda mi się wybudować takiej machiny, to stracę swoją głowę." Musiał więc udawać, że rozpoczął prace nad wspomnianą machiną do regulacji wylewów Nilu. Dzięki przebiegłości udało mu się zachować życie przez 5 lat. Na szczęście w roku 1021 umarł Al-Hakim. Al-Hazen zyskał pięć lat życia, ale nie były to lata beztroskie. Wprawdzie Al-Hazen zasłynął na polu optyki, jednak znany jest również w matematyce, gdyż wielu słynnych matematyków podejmował jedno z jego optycznych zagadnień, znane jako tzw. problem Al-Hazena.

ABU RAJHÁN AL-BÍRÚNÍ

Urodzony w Kát w roku 973. Publikował w językach arabskim i perskim. Zajmował się matematyką i astronomią. Korespondował z Awicenną. Pierwsza dzieło poświęcone było ludności starożytnej "Wspomnienia wieków minionych". Najlepszym jego dziełem geograficznym jest praca "O rzeczach, które wydarzyły się w Indiach". Zawarł w niej swoje doświadczenia z podróży po tym kraju.

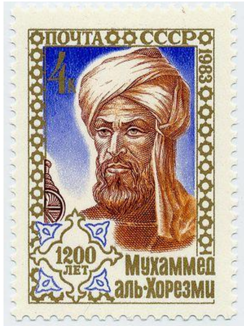
Natomiast z dziedziny matematyki jest autorem dzieła, które przez kilka wieków pełniło rolę podręcznika do nauki matematyki i geometrii. Umarł w miejscowości Ghazna w roku 1048.

Omar Khajjám

Irański matematyk. Studiował w Nisápur, a zajmował się wszystkimi dziedzinami ówczesnej nauki. Jego największym dokonaniem był nowy kalendarz. Na przestrzeni 33 lat, 8 było latami przestępnymi. Był również nauczycielem szkolnym, ale musiał zrezygnować z nauczania ze względu na przekonania religijne.

Był autorem krytycznego stadium hinduskiego pojęcia pierwiastka kwadratowego i sześciennego oraz dzieła zatytułowanego „Algebra". Zamarł podczas lektury „Metafizyki" autorstwa Awicenny. Miejsce jego pochówku okryte jest tajemnicą, a na temat jego związku z innymi naukowcami tamtych czasów krążą legendy.

Abú Abdalláh Muhammad ibn Músźá al-Hvárizmí



Był perskim matematykiem żyjącym w IX w. Jest autorem kilku dzieł poświęconych hindusko-arabskiemu systemowi zapisu liczb i metodom rozwiązywania równań. Odegrały one istotną rolę w upowszechnieniu nowego systemy liczbowego w „północnym świecie", tj. Północnej Europie. Ponieważ zajmował się również algorytmami, niektórzy nazywają go ojcem technologii informatycznej.

Był pierwszym, który rozwiązywał funkcje kwadratowe. Przez jakiś czas zajmował się problematyką liczb dodatnich i ujemnych. Swoimi publikacjami przyczynił się do upowszechnienia algebry na kontynencie europejskim. Jedno z jego dzieł aż do XVI w. pozostawało podstawowym podręcznikiem uniwersyteckim.

SYSTEMY LICZB

Na przestrzeni wieków rozwinęły się trzy podstawowe sposoby zapisywania liczb:za pomocą hieroglifów, alfabetui cyfrowegozapisuliczby.Niemniej jednak tylko przedstawienie za pomocą cyfr jest nazywane systemem liczb. Zapis systemu liczb, albo po prostu system liczb decyduje o sposobie, w jaki liczba może zostać przedstawiona w systemach liczb używając różnych podstaw.

Podstawa systemu *a* decyduje o tym:

- ile cyfr (symboli) jest użytych do opisania liczby *a* (a: 0,1,2,...a-1)
- co przedstawia każda pojedyncza liczba (zazwyczaj wartość podstawy)
- jak można tę liczbę zapisać albo przekształcić zgodnie z tym systemem: liczba całkowita x może by zapisana w następującej formie, w systemie opartym na podstawie *a*:

$$\overline{x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_2 x_1 x_0} = x_n a^n + x_{n-1} a_{n-1} + \dots x_2 a^2 + x_1 a + x_0 ,$$

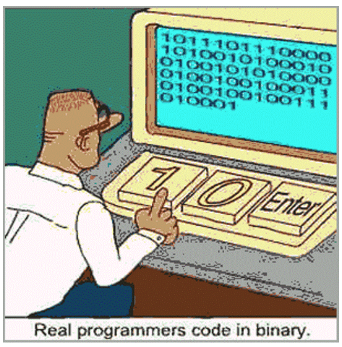
gdzie $x_n, x_{n-1}, \dots x_2, x_1, x_0$ oznaczają liczbę cyfr.

Inne systemy liczb, z wyjątkiem systemu dziesiętnego, zostały skonstruowane przeważnie przez matematyków, głownie do celów teoretycznych albo naukowych.

SYSTEM DZIESIĘTNY

System dziesiętny jest najpopularniejszym i najprostszym sposobem przedstawiana liczb.Od początku liczba 10 była najważniejsza w systemach liczb, zapewne wynika to z faktu,iż ludzie maja 10 palców. W wielu językach, w tym w języku angielskim, słowo "cyfra" oznacza część liczby oraz palec. Interesujące jest też to, że słowo "cyfrowy" najprawdopodobniej pochodzi od "scyfrować," co oznacza, iż ludzie od zawsze spisywali wszystko w cyfrach - zawsze "cyfrowaliśmy". Prymitywny system dziesiętny używany był od 2000 roku p.n.e. w Egipcie oraz w Dolinie Indus. W połowie pierwszego tysiąclecia w Indiach narodził sie pierwszy nowoczesny system dziesiętny,zawierający zero oraz liczby ujemne, znany dziś jako liczby arabskie.

SYSTEM BINARNY

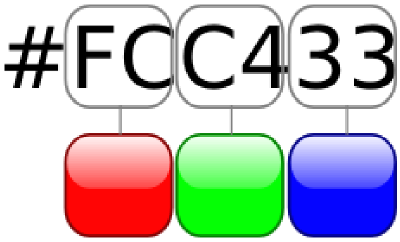


Real programmers code in binary.

Chociaż system binarny oparty na liczbie 2 był znany już w XVII wieku, zaczął być masowo używany dopiero w XX wieku wraz z pojawieniem sie komputera (w oparciu o propozycje Janosa Neumanna). System binarny może przedstawiać liczby poprzez cyfry 0 i 1. W układzie cyfrowym ten system liczb jest najprostszy i najłatwiejszy do zastosowania w praktyce. Powodem takiego stanu rzeczy jest fakt,iż układy cyfrowe maja tylko 2 typy zadań: przewodzenie lub nie przewodzenie prądu, dlatego każde urządzenie elektryczne które dokonuje jakiejś kalkulacji używa systemu binarnego.

Dyski CD / DVD / Blue-Ray są zapisywane poprzez wypalanie punktu na nich albo nie. Ten sposób korzystania z systemu binarnego może prowadzić do zapisu danych. Ponieważ jednak przy bardziej złożonych kalkulacjach wprowadzanie i zapisywanie danych przy użyciu 0 i 1 zajęłoby mnóstwo czasu i miejsca, komputery używają innych systemów liczb. W rzeczywistości w różnych dziedzinachtechniki komputerowejnajlepiej sprawdzaję się różne systemy liczb. Przejście z jednego systemu na inny nie stanowi dużego problemu dla komputera, ponieważ wiąże się to tylko z dużą ilością działań dodawania, a w tym są wystarczająco dobre. Interesujące jest to, że istnieje zegarek, który oblicza i pokazuje czas w systemie dwójkowym.(po prawej) .

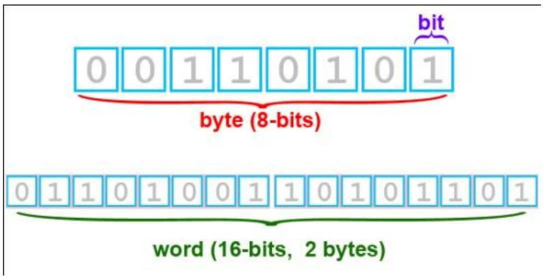
SYSTEM SZESNASTKOWY



System szesnastkowy opiera się na liczbie 16, która korzysta zarówno z liter jak i cyfr (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F) żeby opisać liczby. Jego znaczenie jest takie, że łączy w sobie zalety systemu liczb, którego używamy w codziennym życiu i w IT (technologii informacyjnej). Liczby szesnastkowe mają 2 bardzo ważne cechy: są kompaktowe (liczby są krótkie i używają małej pojemności, tak jak system dziesiętny) i jest bardzo łatwo skonwertować je znowu do systemu binarnego (1 cyfra szesnastkowa odpowiada 4 binarnym). Najczęściej system ten jest używany do opisywania kolorów (na przykład kod kolorów RGB).

System ósemkowy

System ósemkowy opiera się na liczbie 8, która używa cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 do opisywania liczb. Jego wykorzystanie jest ograniczone. Praktycznie jest używanie tylko w komputerach. Co ciekawe plemię Yuki w Kalifornii i plemię Pamenan w Meksyku używa tego systemu, ponieważ licząc używają oni łuków pomiędzy palcami. Czasami system ósemkowy jest używany zamiast szesnastkowego. Wiele języków programowania używa tego systemu liczb, biorąc pod uwagę fakt, że 1 bajt to 8 bitów, więc faktycznie podczas zapisywania danych system binarny, ósemkowy i szesnastkowy są połączone. Na wyświetlaczach cyfrowych system ten jest także często używany.



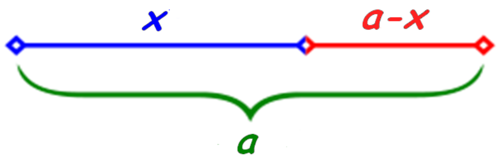
ZŁOTA LICZBA

Złota liczba fascynuje ludzkość od zarania dziejów. Jest tajemnicza i wyjątkowa. W otaczającym nas świecie znaleźć można liczne przykłady jej zastosowania. Swoje źródło ma w tzw. złotym podziale odcinka.

Starożytni i średniowieczni matematycy nazwali złoty podział odcinka „boską proporcją" – w niej widzieli piękno i harmonię. Żyjący w XVI wieku słynny matematyk, astronom i astrolog niemiecki Johannes Kepler powiedział o niej, że jest jak kamień drogocenny.

Czym zatem jest złoty podział odcinka? Jest to podział odcinka na takie dwie nierówne części, że stosunek większej części do mniejszej wynosi tyle samo, ile stosunek całego odcinka do większej części.

Aby wyznaczyć złotą liczbę przekształcamy proporcję złotego podziału odcinka do postaci równania kwadratowego.



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

$$x^2 = a(a-x)$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \qquad \sqrt{\Delta} = a\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$x_2 = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$$

Spośród dwóch rozwiązań tego równania wybieramy z oczywistych względów tylko to, które jest liczbą dodatnią, czyli

$$x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Obliczamy stosunek długości całego odcinka do długości większej części:

$$\frac{a}{x} = \frac{2a}{a(\sqrt{5}-1)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi}.$$

W ten sposób wyznaczyliśmy złotą liczbę. Jej dokładna wartość to $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, co w przybliżeniu wynosi 1,6184...

Wartość tę otrzymać możemy za pomocą ułamka łańcuchowego, przy czym im dłuższy jest ten ułamek, tym lepsze przybliżenie złotej liczby.

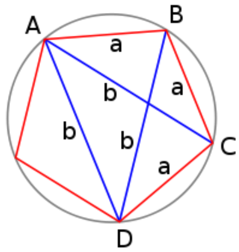
$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}$$

Złota liczba ma kilka ciekawych własności. Aby znaleźć jej odwrotność, wystarczy odjąć od niej jedynkę. Aby ją podnieść do kwadratu, wystarczy dodać do niej jedynkę.

Jest bardzo wiele przykładów występowania złotej liczby i złotego podziału odcinka w geometrii. Oto kilka z nich:

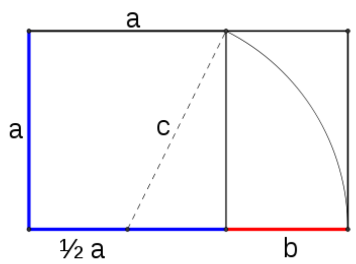
PIĘCIOKĄT FOREMNY

- punkt przecięcia przekątnych wyznacza ich złoty podział
- przekątna pozostaje w złotej proporcji z jego bokiem



Złoty stosunek w pięciokącie foremnym odkrył i udowodnił Hippasus w V wieku p. n.e.

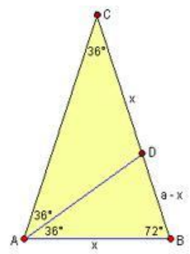
ZŁOTY PROSTOKĄT



- jego boki pozostają w złotym stosunku,
- po dorysowaniu do niego kwadratu o boku równym dłuższemu bokowi prostokąta otrzymuje się nowy, większy złoty prostokąt,
- odcinając od złotego prostokąta kwadrat o boku równym krótszemu bokowi prostokąta otrzymuje się prostokąt, którego boki nadal pozostają w złotym stosunku.

ZŁOTY TRÓJKĄT

- stosunek ramienia do podstawy jest równy złotej liczbie.



Dwudziestościan foremny

wierzchołki trzech wzajemnie do siebie prostopadłych złotych prostokątów wpisanych w dwudziestościan foremny znajdują się w 12 wierzchołkach tego wielościanu.

Bardzo interesujące jest powiązanie złotej liczby z tzw. ciągiem Fibonacciego. Ciąg ten zdefiniowany został przez włoskiego matematyka Leonardo Fibonacciego żyjącego na przełomie XII i XIII wieku w następujący sposób: pierwsze dwa wyrazy, to jedynki, każdy następny jest sumą dwóch poprzednich.

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144…

Stosunek dwóch kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego w miarę wzrastania ciągu jest coraz bliższy wartości złotej liczby.

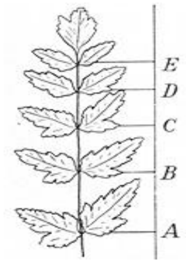
Harmonia i doskonałość płynąca wprost ze złotego podziału widoczna jest w wielu działach sztuki. Grecki Partenon jest tego dobrym przykładem. Stosunek jego wysokości do szerokości, jest taki sam jak szerokości do długości.

Prawom złotego podziału podlegają części ciała ludzkiego. Najlepiej pokazuje to rzymska rzeźba pochodząca prawdopodobnie z II wieku, będąca kopią wykonanego w IV wieku p. n. e. greckiego oryginału dłuta Leocharesa.

Linia I dzieli na dwie części całą postać w złotej proporcji, linia E wskazuje złotą proporcję między głową a górną częścią tułowia, linia O zaznacza podział nóg w kolanach według złotego cięcia.

Obserwacja przyrody prowadzi do bardzo interesujących wniosków dotyczących związku matematyki z botaniką.

Złoty podział odcinka zauważyć można na przykład w układzie listków na łodydze rośliny. Na wspólnej gałązce między każdymi dwiema parami listków trzecia para leży w miejscu złotego cięcia. Szczególna symetria w układzie liści (filotaksja) jest przedmiotem wnikliwych badań prowadzonych od setek lat. Naukowcy informują, że w wielu roślinach odszukać można ściśle związany ze złotą liczbą ciąg Fibonacciego. Na przykład nasiona słonecznika tworzą spirale układające się w dwóch kierunkach, ale liczby tych spiral są kolejnymi wyrazami wspomnianego ciągu. Podobnie rozmieszczone są łuski na szyszkach wielu roślin oraz na owocu ananasa.



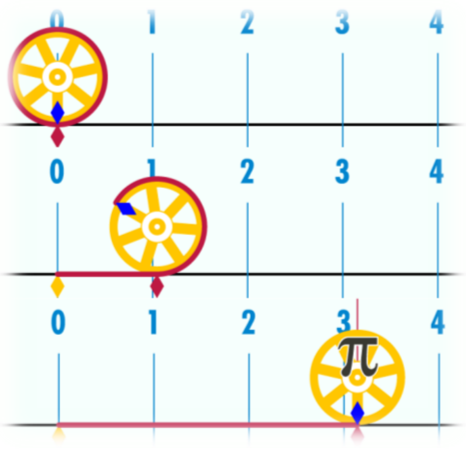
Włoski fizyk, astronom i filozof Galileusz powiedział:

„Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat".

Najlepszym przykładem potwierdzającym te słowa jest fenomen złotej liczby.

LICZBA Π

Liczba pi (π) inaczej zwana ludolfiną jest stałą matematyczną określaną jako stosunek długości okręgu koła do długości jego średnicy.



Wynosi ona w przybliżeniu 3,14159 26535 89793… . Jednakże z uwagi na to, że jest liczbą niewymierną, jest ona powszechnie zaokrąglana do 3,14. W praktyce całkowicie wystarcza znajomość ośmiu cyfr rozwinięcia dziesiętnego, co daje dostatecznie dokładne wyniki w obliczeniach. Można też zdefiniować π na inne sposoby, na przykład jako pole koła o promieniu równym 1 albo jako najmniejszą dodatnią wartość x, dla której sin(x) = 0.

Najczęściej używaną sztuczką mnemotechniczną jest zapamiętanie wierszyka, w którym liczba liter kolejnego słowa to cyfra w rozwinięciu dziesiętnym . Znane są takie wierszyki w języku angielskim, francuskim, rosyjskim, a także polskim, np.:

Kuć i orać w dzień zawzięcie,
Bo plonów niema bez trudu!
Złocisty szczęścia okręcie,
Kołyszesz...
Kuć! My nie czekajmy cudu.
Robota to potęga ludu!

HISTORIA

Symbol π został wprowadzony w 1706 przez matematyka angielskiego Williama Jonesa w dziele Synopsis Palmariorum Matheseos. Liczba π jest niewymierna, co oznacza, że nie może być zapisana jako iloraz dwóch liczb całkowitych i przestępna, tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych. To ostatecznie rozstrzyga, że niemożliwa jest klasyczna konstrukcja (wyłącznie przy pomocy linijki i cyrkla) kwadratu o powierzchni równej powierzchni danego koła.

Bardzo interesująca jest jej historia. Z liczbą π ludzie zetknęli się już w starożytności, zauważając, że stosunek obwodu koła do jego średnicy jest wartością stałą. Babilończycy około 2000 roku p.n.e. szacowali ją jako równą 3, a Egipcjanie w tym samym okresie przyjmowali $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$.

Archimedes w III wieku p.n.e. ustalił Pi jako równą w przybliżeniu $\frac{22}{7}$.

Matematyk grecki Ptolemeusz Klaudiusz w II wieku n.e. przyjmował pi w przybliżeniu

$$\pi \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}.$$

Obliczenie wartości liczby π umożliwia następujący wzór Leibniza:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Liczba pi jest nieskończona. Z biegiem lat uzyskiwano coraz lepsze przybliżenia wartości π sięgające kilkuset miejsc po przecinku. Rekordzistą w ręcznych obliczeniach liczby Pi jest William Shanks, któremu w 1874 udało się uzyskać 707 miejsc po przecinku. Zajęło mu to 15 lat. Później okazało się, że 180 ostatnich cyfr obliczył błędnie.

31.12.2009 Fabrice Bellard ogłosił, że udało mu się obliczyć π z dokładnością do 2 699 999 990 000 miejsc po przecinku. Obliczenia ze sprawdzeniem zajęły 131 dni, a do obliczeń użyto komputera. W roku 2010 obliczono 2 000 000 000 000 000 cyfrę liczby Pi i wynosi ona zero. Praca trwała o wiele krócej, bo tylko 23 dni.

Ciekawostki związane z liczbą π

- 60-letni Japończyk wyrecytował z pamięci 100 tys. cyfr składających się na liczbę Pi.

- Liczba π ma swoich licznych wielbicieli. Obchodzą oni dzień π (14 marca) (amerykański sposób zapisu daty 3.14) oraz dzień aproksymacji π (22 lipca) (europejski sposób zapisu daty 22/7=~3.1428).

-W piramidzie Cheopsa stosunek sumy dwóch boków podstawy do wysokości wynosi 3,1416, czyli przybliżenie Pi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku! Dziś nie można stwierdzić, czy był to zadziwiający przypadek, czy wynik geniuszu nieznanych nam z imienia uczonych.

- Uczeni szukając kontaktu z cywilizacjami pozaziemskimi, wysłali w kosmos drogą radiową informację o wartości liczby π. Wierzą, że inteligentne istoty spoza Ziemi znają tę liczbę i rozpoznają nasz komunikat.

-Nazwa „ludolfina” pochodzi od imienia holenderskiego matematyka Ludolfa van Ceulena, który w 1610 wyznaczył przybliżenie liczby pi z dokładnością do 35 miejsc rozwinięcia dziesiętnego.

Podstawowe wzory zawierające π

- Obwód okręgu o promieniu r.. $O=2\pi r$
- Pole koła o promieniu r.. $S=\pi r^2$
- Pole elipsy o półosiach równych a i b.. $S=\pi ab$
- Objętość kuli o promieniu r.. $V=(4/3)\pi r^3$
- Powierzchnia kuli o promieniu r.. $S=4\pi r^2$
- Miara łukowa kąta półpełnego:.. π radianów

SUDOKU

HISTORIA:

Liczbowe łamigłówki po raz pierwszy pojawiły się w gazetach pod koniec XIXw., gdy francuscy twórcy zagadek zaczęli eksperymentować z usuwaniem cyfr z tzw. "magicznych kwadratów". Le Siecle, dziennik wydawany w Paryżu, opublikował w dniu 19.11.1892 częściowo uzupełniony kwadrat tego typu, o wymiarach 9x9 kratek, podzielony na mniejsze kwadraty o wymiarach 3x3. Jednakże nie było to jeszcze Sudoku, ponieważ zagadka ta zawierała liczby dwucyfrowe, a do rozwiązania jej bardziej potrzebna była znajomość arytmetyki niż logiczne myślenie. Pomimo tego obie zagadki coś ze sobą łączy: w każdym rzędzie, kolumnie i kwadracie suma liczb po dodaniu była taka sama.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

W dniu 06.07.1895r, gazeta La France, rywal dziennika Le Siecle, udoskonalił łamigłówkę tak bardzo, że było to już niemal współczesne Sudoku.

Wprowadzonym ułatwieniem było to, że każdy rząd i kolumna mogły zawierać wyłącznie liczby jednocyfrowe, od 1 do 9. Pomimo faktu, że żaden z kwadratów nie miał specyficznego oznaczenia, w każdym z nich znajdowały się wymagane cyfry, a przymus równości ich sumy ostatecznie prowadził do tylko jednego rozwiązania.

Owe cotygodniowe zagadki były stałym elementem francuskich gazet, takich jak np. L'Echo de Paris, przez prawie dekadę, ale zniknęły w okresie I wojny światowej.

Według Willa Shortza współczesne Sudoku zostało najprawdopodobniej anonimowo zaprojektowane przez Howarda Garnsa, 74-letniego emerytowanego architekta i niezależnego twórcę łamigłówek z Indiany. Po raz pierwsze opublikowano je w 1979r. na łamach Dell Magazines pod nazwą "Miejsce Liczby" i jest to najstarszy wzór tej obecnie popularnej zagadki. Garns zmarł w 1989r. zanim jego dzieło stało się ogólnoświatowym fenomenem. Nie wiadomo jednak czy Howard zetknął się kiedykolwiek ze wspomnianymi wcześniej francuskimi zagadkami.

W Japonii łamigłówka wprowadzona została za sprawą firmy Nikoli Company w gazecie "Monthly Nikolist" w kwietniu 1984r., pod nazwą "Suji wa dokushin ni kagiru". Nazwę tę można przetłumaczyć jako "liczba musi być jednocyfrowa" lub "liczby ograniczone są do jednej" (w języku japońskim słowo dokushin oznacza osobę niezamężną/nieżonatą). W późniejszym czasie, za sprawą Maki Kaji, nazwę zmieniono na Sudoku, co było skrótem nazwy używanej poprzednio. W 1986r. Nikoli wprowadziło 2 zmiany: podanych liczb nie mogło być więcej niż 32, a zagadka stała się "symetryczna" to znaczy, że podane z góry liczby zostały rozdzielone symetyrycznie na obszarze kwadratu. Dzisiaj Sudoku publikowane są w popularnych japońskich czasopismach, np. w Asahi Shimbun.

O Sudoku w skrócie:

Sudoku jest liczbową łamigłówką logiczną. Jej celem jest uzupełnienie diagramu o wymiarach 9x9 w taki sposób, by każda kolumna, rząd i każdy z kwadratów 3x3 zawierał wszystkie cyfry z przedziału 1-9. Twórcy tych zagadek przygotowują częściowo uzupełniony diagram, posiadający tylko jedno rozwiązanie.

Wypełnione łamigłówki przypominają trochę kwadrat łaciński, jednakże różnią się tym, że w żadnym rzędzie, kolumnie ani mniejszym kwadracie cyfry nie mogą się powtarzać.

Zagadka została rozpowszechniona pod nazwą Sudoku w 1986r. przez japońską firmę zajmującą się układaniem łamigłówek Nikoli Company, a nazwa ta oznacza "pojedynczą cyfrę". Gra stała się popularna w 2005r.

Łamigłówki liczbowe pojawiły się we francuskich gazetach w XIX wieku.

6 lipca 1895 roku dziennik La France wprowadził taką wersję łamigłówki, która bardzo przypominała dzisiejsze Sudoku.

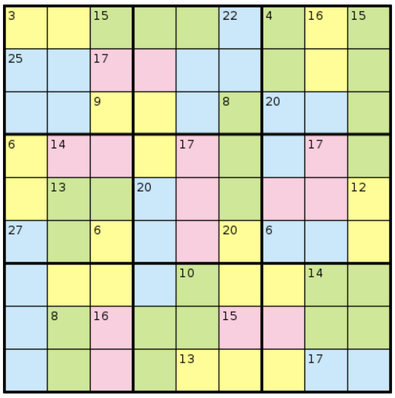
KILLER SUDOKU

Jej celem jest uzupełnienie diagramu liczbami 1-9 według poniższych instrukcji:

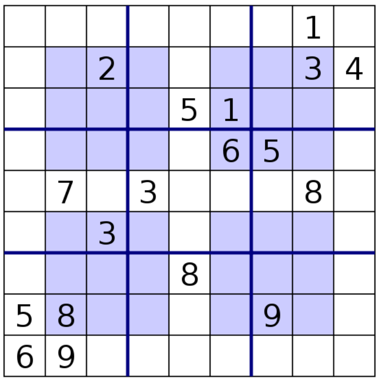
- każdy rząd, kolumna i kwadrat zawierają określoną cyfrę tylko jednokrotnie;

- suma wszystkich cyfr w określonej przestrzeni musi zgadzać się z liczbą zapisaną się w rogu danego kwadratu;

- W określonej przestrzeni cyfra może wystąpić jednokrotnie (jest to standardowa zasada która oznacza, że żadna przestrzeń nie może przekraczać 9 kratek).



HYPERSUDOKU PUZZLE:



Jest to jeden z najpopularniejszych wariantów, drukowanych przez gazety i dzienniki na całym świecie. Wzór jest identyczny jak w normalnym Sudoku, ale posiada dodatkowe wewnętrzne powierzchnie (kolor niebieski), w których liczby 1-9 muszą się pojawić. Sposób rozwiązywania tego typu zagadki jest trochę inny od standardowego, ze względu na wpływ nakładających się na siebie kwadratów. Daje to graczowi więcej informacji i pozwala logicznie zmniejszyć liczbę możliwości uzupełniania poszczególnych pól cyframi. Zasady grania są podobne, jednakże w tym typie zagadki prawdopodobnie większy nacisk kładzie się na dokładną obserwację wewnętrznych powierzchni niż na rzędy i kolumny.

ZASTOSOWANIE MATEMATYKI W RÓŻNYCH DZIEDZINACH ŻYCIA

Matematyka jako dziedzina nauki znajduje zastosowanie w różnych aspektach naszego życia: w codziennych zakupach, w bankowości, na giełdzie papierów wartościowych, w architekturze, ekonomii, astronomii, informatyce, szyfrach, programowaniu, czy kontroli jakości w fabrykach (prawdopodobieństwo), a także w prognozowaniu pogody. W dalszej części tekstu chcielibyśmy przedstawić trzy najważniejsze naszym zdaniem jej zastosowania.

FIZYKA

We współczesnym świecie dalszy postęp w dziedzinie technologii wymaga znajomości fizyki i matematyki na naprawdę wysokim poziomie. Najlepszym tego przykładem jest królowa sportów techniczych, Formuła 1.

Projektanci wszystkich zespołów szukają złotego środka pomiędzy wagą, siłą i ceną produktu. Samochód jest szybszy, gdy jego odpowiednie składniki są lżejsze. Z drugiej jednak strony, jeśli jest zbyt lekki, może łatwo ulegać zniszczeniu ze względu na zbyt małą ilość użytego do jego produkcji materiału.

Matematyka znajduje zastosowanie nie tylko w sporcie takim jak Formuła 1, lecz także analogicznie w projektowaniu prostego domu, ponieważ zawsze musimy wiedzieć ile materiału potrzebujemy do jego budowy.

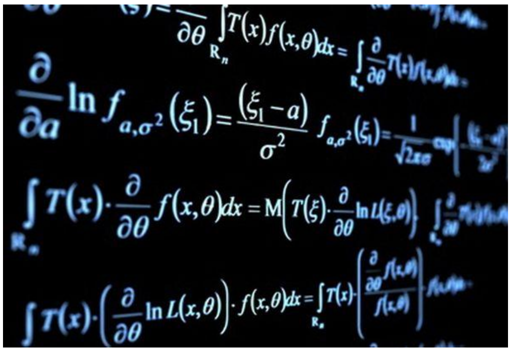
EKONOMIA

Matematyka odgrywa ważną rolę także w ekonomii. W biznesie najczęściej znajdują zastosowania proste obliczenia: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, obliczenia procentów i odsetek. Wiele danych zapisywanych jest w postaci liczb: godziny pracy, ilość towarów, siła robocza, i wiele innych, w tym obecne wszędzie wokół nas pieniądze.

W biznesie, jednym z najważniejszych celów jest zysk przedsiębiorcy, który napędza dalszy interes. W celu określenia zysku trzeba wykonać wiele obliczeń. Musimy obliczyć całkowity przychód i wydatki ogółem, gdyż to różnica między tymi dwoma kwotami decyduje o naszym zysku. Jeśli otrzymamy liczbę dodatnią, to możemy się tylko cieszyć, jeżeli jest ujemna, to musimy znaleźć sposób, aby wynik ten poprawić. Obliczanie dochodów w danym okresie (zwykle jeden miesiąc lub jeden rok), nie jest tak trudne jak oszacowanie poniesionych wydatków. W celu obliczenia dochodów musimy zsumować pieniądze otrzymane ze sprzedaży produktów lub usług.

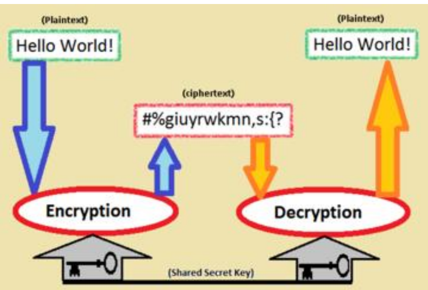
Obliczanie wydatków jest bardziej skomplikowane. Dam wam prosty, ogólny przykład wydatków przedsiębiorstwa. Powiedzmy, że prowadzimy biznes polegający na sprzedaży popcornu. Aby móc go sprzedawać musimy mieć najpierw składniki i maszyny potrzebne do

jego produkcji. Potrzebny jest więc kapitał początkowy na ich zakup. Pieniądze te pozyskać można z funduszy własnych, pożyczek, dotacji lub kredytów od dostawców. Gdy mamy już maszyny, potrzebujemy pracowników, którzy będą produkować i sprzedawać popcorn. Mogą oni otrzymywać stałe miesięczne wynagrodzenie lub pensja ich będzie obliczana przez pomnożenie liczby przepracowanych godzin przez stawkę za godzinę. Koszty personelu to nie tylko wypłaty, ale też premie i podatki, które pracodawca płaci za każdego zatrudnionego. Wielkość podatków jest zależna od zarobków. Teraz mamy sprzęt i personel, lecz wciąż potrzebujemy produktu, który możemy sprzedać. Produkcja popcornu wymaga kukurydzy i przypraw, opakowań różnego rozmiaru oraz serwetek. Cena produktu ustalana jest na podstawie kosztów składników. Cena powinna być wyższa niż poniesione koszty, ponieważ od dochodów ze sprzedanego popcornu w całym miesiącu, musimy odjąć cenę produktów, pensję dla pracowników, wierzycieli i inwestorów, a także 20 %VAT. Kwestia VAT-u (podatek od towarów i usług) jest bardzo ważną częścią produktu. Produkt sam w sobie posiada dwie ceny – brutto i netto. Cena netto jest końcową ceną po odtrąceniu wszystkich zniżek i zwrotów nadpłaty i jest kwotą, którą dostaje firma sprzedająca. Cena brutto jest płacona przez klientów np. w sklepie i zawiera 20% VAT (na Węgrzech), który jest płacony przez firmę do skarbu państwa. Co oznacza , że jeśli chcemy dostać 200 forintów za średniego rozmiaru paczkę popcornu, to cena detaliczna musi wynosić 250 forintów (włącznie z 20%-towym VAT-em), ponieważ na koniec miesiąca firma musi zapłacić podatek stanowiący 20% miesięcznego dochodu. Po odjęciu tych pieniędzy zostaje nasz wypracowany zysk, będący naszym źródłem utrzymania, a także funduszem, z którego część możemy przeznaczyć na rozwój firmy.



Oszacowany zysk przedstawia się następnie kadrze kierowniczej, inwestorom, czy właścicielom, którzy decydują o przyszłości przedsiębiorstwa i ewentualnie wprowadzają konieczne zmiany w jego funkcjonowaniu. W celu zilustrowania opisanych powyżej danych wykorzystuje się między innymi tabele i wykresy.

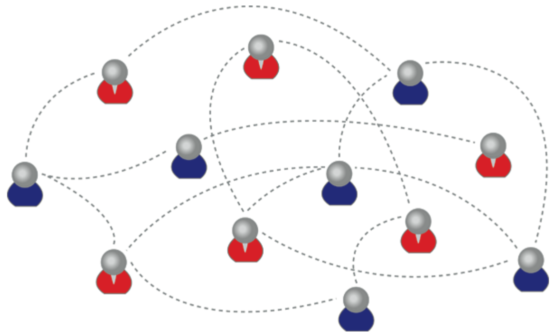
INFORMATYKA



Inną ważną dziedziną nauki, w której matematyka także znalazła zastosowanie, jest kryptografia. Dzisiejsza kryptografia łączy wsobie elementy matematyki, informatyki i inżynierii elektrycznej. Zastosowanie kryptografii obejmuje na przykład karty płatnicze, hasła komputerowe czy handel elektroniczny.

Współczesna kryptografia może zostać podzielona na dwa obszary: kryptografię kluczy symetrycznych i kryptografię kluczy publicznych.

Kryptografia kluczy symetrycznych odnosi się do metod kodowania, w których nadawca i odbiorca dzielą ten sam klucz.



Znaczącą wadą symetrycznego kodowania jest kwestia bezpiecznego zarządzania kluczem. Każdą oddzielna para w grupie, w której zachodzi komunikacja, musi posługiwać się odrębnym kluczem i prawdopodobnie wymienić się też każdym zaszyfrowanym tekstem. Liczba potrzebnych kluczy zwiększa się tak jak kwadrat liczby członków danej grupy, w związku z czym potrzeba skomplikowanego programu zarządzania kluczami, by zachować je wszystkie w tajemnicy. Lecz istnieje też inny sposób.

Algorytmy kluczy publicznych bazują często na zawiłych problemach, związanych z teorią liczb, na przykład z rozkładem liczb na czynniki. W związku ze stopniem trudności problemu, większość algorytmów kluczy publicznych bazuje na takich działaniach jak mnożenie i potęgowanie, które są dużo bardziej wymagające obliczeniowo od technik używanych w większości bloków szyfrowych. W rezultacie, kryptograficzne klucze publiczne są w zasadzie kryptograficznymi hybrydami, w których szybki, wysokiej jakości algorytm szyfrowania klucza symetrycznego jest używany do przesyłania wiadomości, podczas gdy odpowiedni klucz symetryczny jest wysłany z wiadomością, ale szyfrowany przy użyciu algorytmu klucza publicznego.

AUTHORS AND TRANSLATORS OF THE ARTICLES

Prehistoric mathematics	*Paweł Wierzbicki, Krystain Greniuk, Grzegorz Pusz Eszter Tétényi, Tamás Terjék*
Mesopotamian mathematics	*Tamás Terjék, Eszter Tétényi, Luca Várady, Angelika Knopek*
Mathematics in Ancient Egypt	*Nikolett Semsei, Anna Akócsi, Ewelina Spyrka, Jakub Cymbalista*
Mathematics of Ancient China	*Kata Fenyvesi, Gábor Forintos, Márton Kiss, Katarzyna Skibińska, Rafał Jamrozik, Wiletta Pufka, Krzysztof Greszczuk, Radosłąw Jaroszek, Karolina Kulpa,*
Mathematics of Ancient Greeks	*Levente Dankó, Dóra Szegi, Zoltán Lakos, students of the 2m class from Poland*
Arab mathematics	*Péter Pádár, Dávid BánHidi, Katarzyna Skibińska, Rafał Jamrozik, Wiletta Pufka, Krzysztof Greszczuk, Radosłąw Jaroszek, Karolina Kulpa,*
Number systems	*Dávid Bánhidi, Gábor Forintos, Jurand Kołodziej, Maciej Gąciarz*
The Golden Number	*Angelika Śliwińska, Damian Grzegocki and other students from the 1 mi clas* **,** *Nikolett Semsei*
π-number	*Paweł Wierzbicki, Krystian Greniuk, Grzegorz Pusz Zoltán Lakos*
Sudoku	*Tamás Lővei, Zoltán Lakos, Angelika Knopek*
Math in Real Life	*Péter Pádár, Gábor Forintos, Edvárd Krepuska, students of the 2 mi class from Poland*
ENGLISH TEACHERS:	*Lucyna Bagrowska – Feige, Hedvig Gergely, Krzysztof Dorożyński, Aleksandra Kozak, Agnieszka Janowska, Marta Fajfer, Krisztina Lienhardt*
MATH TEACHERS:	*Mária Fekete, Jarosław Cichoń, Levente Koncz, Krystyna Jałoszyńska, Agnieszka Żukrowska, Grzegorz Radczak, Anna Grabowiecka, Ewa Dunaj*

THE COORDINATORS OF THE PROJECT

Lucyana Bagrowska – Feige, ZESPÓŁ SZKÓŁ ROLNICZYCH W NYSIE:

The World of Numbers project has been the third of this type I coordinated in our school, but it has also been the most successful and rewarding of them all. That's because the cooperation with the partner teachers and their students went on exceptionally well. We did together many inspiring things, which helped me to develop my organizational skills, enabled to become a more creative teacher and most of all it was a chance to meet great people, visit them in their homes, learn about their country, the city where they live and work. I'm really grateful for this experience.

A Számok Világa nevű projekt a harmadik ilyen típusú program, amit az iskolámban koordinálok, de eddig ez volt a legsikeresebb és a leghasznosabb is. Ennek oka az, hogy a partner tanárokkal és diákjaikkal különösen jól tudtunk együttműködni. Sok inspiráló dolgot csináltunk együtt, amelyek segítettek engem abban, hogy fejlesszem szervezői képességemet, kreatívabb tanárrá tett és legfőképp lehetővé tette számomra, hogy nagyszerű emberekkel találkozzam, meglátogassam őket otthonukban, ismerkedjek az országukkal, a várossal, ahol élnek és dolgoznak. Hálás vagyok ezért az élményért.

Hedvig Gergely, English teacher, Árpád Gimnázium:

The Comenius project has been a great opportunity for us from different points of view. While we were building an international relationship, were working together with our foreign partner, getting to know their way of life, their traditions, and Polish-Hungarian friendships were made, our own team, our friendship became stronger too.

A Comenius project nagyszerű lehetőséget adott számunkra sok szempontból. Miközben nemzetközi kapcsolatot építettünk, közös munkát végeztünk külföldi partnerünkkel, ismerkedtünk az ő életükkel, hagyományaikkal, lengyel-magyar barátságok kötődtek, a mi csapatunk is jobban összekovácsolódott, a mi barátságunk is szorosabbá vált.

Mária Fekete, teacher of mathematics, Árpád Gimnázium:

I enjoyed the whole two years working with these great students, doing maths after lessons in a different way, using and improving my English. I will never forget our trip to Nysa, to a nice little town full of friendly people and the meetings with kind Polish teachers. I think that all of us who have taken part in the project became rich in good experiences and new skills.

A két év során nagyon élveztem, hogy ezekkel a nagyszerű diákokkal dolgozhattam együtt, foglalkozthattam matematikával a tanórákon túl is, hasznosíthattam és fejleszthettem az angol tudásomat. Sosem fogom elfelejteni utazásunkat Nysába, ebbe a szép és barátságos kisvárosba, találkozásunkat a lengyel tanárokkal. Azt hiszem, hogy mindannyian, akik ebben a projektben részt vettünk, számos jó élménnyel, s új készségekkel gazdagodtunk.

WHAT WAS THE BEST THING ABOUT OUR COMENIUS PROJECT FOR YOU?

Some of the students who answered our question have been working in the project since the beginning, others later joined us and became hosts or hostesses.
Twelve students of a specialized math class of Árpád Secondary School turned up for the first meeting in 2009 but gradually almost the whole class got involved.
There are talented young people here in maths, of course, but also in a lot of other fields like informatics, languages, dance, sports and visual arts.
They are all open-minded and a lot of them are hard-working too.

Mi volt a legjobb dolog számodra a Comenius project során?

A kérdést megválaszoló diákok közül néhányan a kezdetektől fogva a projektben dolgoztak, mások később csatlakoztak hozzánk és vendégül láttak lengyel diákokat.
Az első megbeszélésre 2009-ben az Árpád Gimnázium speciális matematika tagozatú osztályának tizenkét diákja jött el, de fokozatosan szinte az egész osztály résztvevője lett a projectnek.
Ezek a diákok természetesen tehetségesek a matematikában, de más területeken is, mint az informatika, idegen nyelvek, tánc, sportok és a vizuális művészetek.
Mind nyitottak a világra és sokan közülük rendkívül szorgalmasak is.

Forintos Gábor:

Well, it is quite a difficult question, because I had a lot of good experiences, but the best was our journey itself. We had a wonderful 10 days in Poland and we had the occasion to get to know the country and I made new friends too. So the best was for me, that this project made these two nations get closer. And I had the possibility to make new friends, and talk about maths in English.

Hát ez egy elég nehéz kérdés, mert sok jó élményem volt, de a legjobb maga az utazás volt. Csodálatos tíz napunk volt Lengyelországban és új barátokat is találtam. Szóval számomra az volt a legjobb, hogy ezt a két nemzetet közelebb hozta egymáshoz. Ezen kívül lehetőségem volt új barátokat találni és angolul beszélni matematikáról.

Lakos Zoltán:

This Comenius Project gave us the opportunity to learn how to work as a part of a team and to get to know a different culture. The most exciting event for me was the visit of our Polish friends. I'm sure that I'll never forget those funny days.

A Comenius Project lehetővé tette számunkra, hogy csapatmunkát végezzünk és megismerjünk egy másik kultúrát. Számomra a lengyel barátaink látogatása volt a legizgalmasabb. Biztos vagyok benne, hogy nem fogom elfelejteni azokat a vidám napokat.

Lővei Tamás:

I most enjoyed in the Polish project that I had a chance to get to know a lot of new people from a totally different culture.

A lengyel projektben azt élveztem legjobban, hogy megismerkedhettem egy csomó új emberrel egy teljesen ismeretlen kultúrából.

Krepuska Edvárd:

If I hadn't been in this program, maybe I would have never tired the tasty pirogi. One of my biggest experiences was, when I heard the people shouting from the castle of Hollókő on the hill on the other side of the valley.

Ha nincs ez a program talán soha se tudom meg, milyen finom is a pirog.Egyik legjobb élményem volt, mikor a hollókői kiránduláson a várral szemben lévő dombon állva hallottuk a várból szólókat.

Dankó Levente:

For me the whole project was memorable. I loved meeting new people and I surprisingly enjoyed our stay at the dormitory thanks to your and your headmaster's hospitality. I even tried something that I think I would have never tried without this project and that was dancing (yes I know I wasn't very successful).

Számomra az egész project emlékezetes marad. Élveztem, hogy megismerkedem emberekkel és meglepő módon tetszett az élet a kollégiumban is, a vendéglátók és igazgatónőjük vendégszeretetének köszönhetően. Még valami olyasmit is kipróbáltam, amit azt hiszem a project nélkül soha nem próbáltam volna ki, és ez a táncolás volt (tudom, nem voltam valami sikeres).

Szegi Dóra:

If I hadn't taken part in this project, I wouldn't have had the occasion to try to fit into a foreign family's life, and get to know foreigners of my age. It was very interesting to take care of a girl for 11 days. It was tiring, but full of experiences.

Ha nem vettem volna részt ebben a programban, nem lett volna lehetőségem kipróbálni, milyen egy teljesen idegen család életébe beilleszkedni, velem egykorú külföldiekkel megismerkedni. Nagyon érdekes volt kipróbálni magam abban, hogyan tudok ellátni 11 napon keresztül egy lányt, figyelni rá, gondoskodni róla. Bár fárasztó volt, de teli élményekkel.

Kiss Márton:

It's not so easy to summarize all the things I think about the project. I enjoyed it much and if I'll have a chance I'll take part in a project like this again. It was nice to get to known people from another culture. I really enjoyed the events we took part in together. Also I think it's a very good thing that students of 2 countries make something together. It's a very important thing to have a good relationship with other nations. Also it was interesting to get to know a Polish family's life and habits.

Nem könnyű összefoglalni mindazt amit a projectről gondolok. Nagyon élveztem és ha lesz lehetőségem, ismét részt veszek egy ilyen projectben. Jó volt hogy megismerkedtünk olyan emberekkel, akik egy másik kultúrához tartoznak. Nagyon tetszettek azok az események, amelyken közösen vettünk részt. Ezen kívül azt gondolom, az is jó dolog, hogy két ország diákjai együtt hoznak létre valamit. Nagyon fontos dolog, hogy jó legyen a kapcsolatunk más országokkal. Érdekes volt egy lengyel család életét és szokásait is megismerni.

Semsei Nikolett:

It was one of my biggest experiences in my life. I could practice the language. It is easier now to talk with other people in another language. We could make friends with foreign people and I *think this is the best thing about this project. A brand new thing for me was translating the articles. I've never tried it, but now I know that I can do it.*

Életem egyik legnagyobb élménye volt. Gyakorolhattam a nyelvet, és most már könnyebben beszélek másokkal idegen nyelven. Barátságokat alakítottunk ki külföldi diákokkal és szerintem ez a legjobb dolog ebben a projektben. A fordítás egy teljesen új dolog volt számomra. Még sosem próbáltam, de már tudom, hogy meg tudom csinálni.

Tamás Terjék:

I'll always remember the great time we spent together – the programs, the trips and the nights. If I hadn't had joined this project, I wouldn't have discovered our class community. Now I know, how to make pirogi and how to play volleyball.

Mindig emlékezni fogok arra, milyen jó volt együtt lenni – a programokra, a kirándulásokra ée az estékre. Ha nem csatlakoztam volna a projecthez, nem jöttem volna rá, hogy van osztályközösségünk. Most tudom, hogy kell pirogot készíteni és hogy kell röplabdázni.

Fekete Petra:

I got to know a lot of foreign people, and their lifestyle, which is completely different from ours. My best experience was when we saw them and we found ourselves in their life rhythm, and I heard that they dance too. I received a lot of experience, e.g. I learned to work with foreign people.

Kipróbálhattam magam abban, hogyan tudok alkalmazkodni valakihez napi 24 órában 11 napon keresztül. Nehéz volt, hogy nem csak a saját szükségleteimre kellett figyelnem, hanem arra is, hogy a másik éhes, fáradt, vidám vagy épen szomorú-e.Ha nincs a programban, nem mentem volna el a Láthatatlan Kiállításra, pedig nagyon élveztem.

Fenyvesi Kata:

I got to know a lot of foreign people, and their lifestyle, which is completely different from ours. My best experience was when we saw them and we found ourselves in their life rhythm, and I heard that they dance too. I received a lot of experience, e.g. I learned to work with foreign people.

Megismertem sok külföldit és az életmódjukat, ami teljesen különbözik a miénktől.A legjobb élményem az volt, amikor megláttuk őket és mi is az ő életritmusukat vettük át és meghallottam, hogy ők is táncolnak. Sok élményben volt részem, például megtanultam külföldiekkel dolgozni.

Tétényi Eszter:

When they were here on the third or fourth evening when we were really tired, Ewa, Ala and me went to see the lights of Budapest by car.

Legemlékezetesebb számomra ittlétük harmadik vagy negyedik estéje, mikor már nagyon fáradtak voltunk, akkor Ewa, Ala és én elmentünk este autóval megnézni a kivilágított Budapestet.

Tamás Melitta:

I really enjoyed the days when the Polish students were here in Budapest. We did a lot of things. For example: we went to a labyrinth and we never knew where we were. But we enjoyed it. Once we went to a cruise and then we could see the whole city and it was beautiful. (Only it was a bit cold…) And we could speak to each other in a good atmosphere. I'm really glad that I was in this group, in this project because I made a lot of new friends and gained a lot of experience.

Nagyon élveztem azokat a napokat, amikor a lengyel diákok Budapesten voltak. Sokféle dolgot csináltunk. Elmentünk például egy labirintusba és soha nem tudtuk, hol vagyunk. De jól szórakoztunk. Egyszer hajókázni mentünk és láthattuk az egész várost, ami gyönyörű volt. (Csak egy kicsit hideg …) És jó hangulatban beszélgettünk egymással. Nagyon örülök, hogy csatlakoztam ehhez a projekthez, mert sok új barátot szereztem és sok élményben volt részem.

Zisis Christoforos:

The whole project was really memorable.

Az egész projekt emlékezetes volt.

Pádár Péter:

The project was very good because I got to know new and foreign people. Maybe the most unforgettable event was when we first saw the Polish school. I hope that in my life it will be useful that I have learnt how to work together with foreign people.

A project nagyon jó volt mert megismerkedtem új emberekkel, külföldiekkel. Talán a legemlékezetesebb esemény az volt, amikor megláttuk a lengyel iskolát. Remélem, az életem során hasznosnak fog bizonyulni, hogy megtanultam külföldi diákokkal együtt dolgozni.

Várady Luca:

For me the most unforgettable events were the programs in the evening together. I think in that time we could talk to each other the most and the most freely. This 2 -year- long project (especially the organization of the „portya”, when we made the Polish students find certain places in the city on their own) improved my orienteering skills. I got to know Nysa and found out more about Budapest too.

Számomra a legemlékezetesebbek az esti közös programok voltak. Szerintem akkor tudtunk a legszabadabban, a legtöbbet beszélgetni egymással.Ez a két eves projekt (főként a „portya” szervezése) a tájékozódó képességemet és a szervezőkészségemet fejlesztette. Nemcsak Nysat, Budapestet is jobban megismertem.

Bánhidi Dávid:

For me, the best memory is, when we went to Poland, and we could meet students from another country and we got to know the Polish traditions. It was wonderful, especially because I had never done anything like this before. So thanks for my teachers that I could be in this project. Before the trip, I was not so sure, that my English knowledge would be enough, but this project made my English better, and made me feel that I'm able to make myself understood and have a conversation with a foreigner.

Számomra a legjobb emlék az, amikor Lengyelországba mentünk és egy más ország diákjaival találkoztunk és megismerkedtünk a lengyel hagyományokkal. Ez csodálatos volt, különösen mivel én még soha nem csinálta ehhez hasonlót. Ezért köszönöm a tanáraimnak, hogy benne lehettem a projectben. Az utazás előtt nem voltam biztos abban, hogy az angol tudásom elegendő lesz, de ez a project javította az angol tudásomat és most már tudom, hogy meg tudom magam értetni és beszélgetni tudok egy külföldivel.

THE POLISH STUDENTS TALK ABOUT THEIR VISIT TO BUDAPEST

Marta Jezierska

During this student-exchagne I could learn a lot of new things and visit so many beautiful places. But this was not only great opportunity to go sightseeing, acqure knowledge, improve language skills, but also to meet interesting people and make some friends.

A diákcsere program során sok új dolgot tanultam és sok szép helyre eljutottam. De ez nem csak városnézésre, új ismeretek szerzésére és a nyelvtudás fejlesztésére volt jó alkalom, de érdekes emberekkel is megismerkedtem és barátokat szereztem.

Grzegorz Pusz

In my opinion our visit to Budapest was interesting and I will have many good memories from there. Everyone was very nice and they always had some good ideas to spend our free time. If I have the opportunity to visit Budapest again I will do this.

Véleményem szerint a budapesti látogatás érdekes volt és sok jó emléket őrzök róla. Mindenki nagyon kedves volt és mindig voltak jó ötleteik, hogy hogy töltsük el a szabadidőnket. Ha lesz alkalmam rá, megint elmegyek Budapestre.

Patrycja Garncarz

Our visit to Budapest was an unforgettable adventure. I had opportunity to get to know traditions and customs of Hungary. I could attend big-city lifestyle which was a very impressive experience. I also met amazing people with whom I spent wonderful time. It was the best adventure of my life.

A budapesti látogatásunk felejthetetlen élmény volt. Megismerhettem magyar hagyományokat és szokásokat. Nagyvárosi életet élhettem, ami nagy hatást tett rám. Nagyszerű emberekkel is találkoztam, akikkel csodálatos volt együtt lenni. Életem legjobb élménye volt.

Paweł Wierzbicki

It was a great experience to be there. I could get to know what it is like to live in such a big city and I can say that it is always in a hurry. If you want to get somewhere you need to use various means of transport and I liked it very much. It was also a great opportunity to admire all the landmarks located in Budapest, which are really interesting.

Nagy élmény volt ott lenni. Megtudtam, milyen is egy ilyen nagy városban lakni, és mondhatom, az mindig nagy rohanás. Ha el akar az ember jutni valahova, valamilyen tömegközlekedési eszközt kell ígénybe vennie. És ez nekem nagyon tetszett. A sok nevezetes látnivaló, amit Budapesten megcsodáltunk, szintén nagyon érdekes volt.

Krystian Greniuk

I think that it was a great time which we spent there. I met a lot of new people and we were doing many interesting things. I could find out what life in the big city looks like. I've got cool memories from this experience and I wish I could do it again.

Véleményem szerint nagyszerű volt ott lenni. Sok emberrel ismerkedtem meg és sok érdekes dolgot csináltunk. Megtudhattam, milyen az élet egy nagyvárosban. Klassz emlékeim vannak erről az élményről és szívesen újra elmennék.

Paulina Kanaś

I'll never forget this adventure. I met a lot of great people, visited wonderful places and learned interesting facts connected with Maths. I spent such a good time in Budapest.I hope our friendships will survive as long as it is possible. It was worth taking part in this exchange.

Soha nem fogom elfeljteni ezt a kalandot. Sok nagyszerű emberrel találkoztam, gyönyörű helyeken jártam és érdekes dolgokat tanultam a matematikával kapcsolatban. Remekül éreztem magyam Budapesten. Remélem, a barátságunk olyan sokáig fog élni, ameddig csak lehet. Érdemes volt részt venni ebben a csereprogramban.

Marcin Obara

In my opinion it was an amazing adventure. I met a lot of Hungarian people from exchange but not only. Project gave us a chance of training our language skills, and maths too. It was my third time in Hungary but this time I got to know much better the traditions, cuisine and lifestyle of the big city, which in normal life must be so tiring. I hope to see my friends from Budapest again in the near future.

Véleményem szerint ez egy nagyszerű élmény volt. A csereprogram kapcsán sok magyar embert ismertem meg, de nem csak a cserepartnereket. A projekt lehetőséget adott nekünk, hogy gyakoroljuk az angol nyelvet és a matmematikát is. Harmadik alkalommal voltam Budapesten, de most sokkal jobban megismertem a hagyományokat, a magyar konyhát és a nagyvárosi életet, ami rendes kölülmények között nagyon fárasztó lehet. Remélem, hamarosan újra találkozom a budapesti barátaimmal.

Ala Małejki

I had been waiting for this exchange since Hungarian students visited us last year. We became attached to them so much. Having spent almost two weeks with such magnificent people was a great experience. We had an opportunity to see how the life in a big city looks like and I think that I was not the only one who was charmed by it. Furthermore adapting to their way of daily living, trying traditional meals and taking part in Hungarian classes is possible only during such an exchange. I'm sure that this relationship will survive for a long time and that it was our first but not last trip to Budapest!

Azóta vártam erre az útra, amióta a magyar diákok tavaly meglátogattak minket. Annyira jó kapcsolatba kerültünk! Nagy élmény volt ilyen nagyszerű emberekkel tölteni majdnem két hetet. Megláttuk, milyen a naygvárosi élet, és azt hiszem, nem én voltam egydül, akit ez elbűvölt. Ezen kívül, alkalmazkodni a mindennapi élethez, megkóstolni a hagyományos ételeket és részt venni az iskolai órákon csak egy ilyen csereprogram kapcsán lehetséges. Biztos vagyok benne, hogy ez a kapcsolat nem szakad meg és ez az első de nem utosó útunk volt Budapestre.

Angelika Boroń

My memories from this exchange are still fresh. We spent wonderful time together with Hungarian students. I also met there a lot of new friends with whom I am still in touch. Because of them I had an opportunity to see a beauty of Budapest and I think that the most impressive it is at night. Once we had a trip on a boat and the views were amazing. This exchange was a great opportunity for me to brush up on language and to strike up a friendship with Hungarian people.

Még frissen él bennem ennek a csereprogramnak az emléke. Nagyszerű volt együtt lenni a magyar diákokkal. Sok új barátot is szereztem, akikkel azóta is tartom a kapcsolatot. Nekik köszönhetően láttam Budapest szépségeit és szerintem a legszebb a város este. Egyszer sétahajóztunk, és a látvány lenyűgöző volt. Ez a csereprogram jó alkalom volt számomra, hogy felelevenítsem az angol tudásomat és magyar barátokat szerezzek.

Angelika Śliwińska

This was my first time in Hungary. I spent great moments in Budapest, which is really amazing. Beautiful sights made a huge impression on me but mostly I will remember people I have met. We had a chance to see and visit many interesting places. The best museum which we visited was the Palace of Miracles. We also had an opportunity to try national dishes of our friends. Sometimes strange but very tasty. I hope that I will meet soon with my Hungarian friends and I will walk down the streets in Budapest again.

Először jártam Magyarországon. Nagyszerűen éreztem magyam. A gyönyörű látnivalók nagy hatással voltak rám, de leginkább az emberekre emlékeszem, akiket megismertem. Sok érdekes helyre eljutottunk. A legjobb múzeum a Csodák Palotája volt. Megkóstoltuk a nemzeti ételeket is. Néha furcsa volt, de nagyon ízletes. Remélem, hamarosan újra találkozom a magyar barátaimmal és sétálhatok Budapest utcáin.

Damian Grzegocki

I really enjoyed this trip, because it was my first exchange and I have never been to Budapest. I spent unforgettable moments with my new friends, I saw beautiful buildings and visited a lot of them. I had a chance to find out a lot about the country, town, school and monuments. I also tried new dishes, which were very good. I had an opportunity to be the part of a different life and I will never forget it.

Nagyon élveztem ezt az utat, mert ez volt az első csereprogramom és Budapesten sem jártam még. Felejthetetlen perceket töltöttem az új barátaimmal és gyönyörű épületeket láttam és látogattam meg. Sokat megtudhattam az országról, a városról, az iskoláról és a látnivalókról. Új ételeket kóstoltam, amik nagyon ízlettek. Részese lehettem egy másféle életformának és ezt soha nem fogom elfelejteni.

“I hope
our friendship will survive as long as it is possible.“

Paulina Kanaś

CONTENT

Sources:

W. Krysicki, E. Kącki: Jak liczono dawniej, jak liczymy dzi
Priya Hemenway: A titkos kód, Budapest 2009, Vince Kiadó
Sain Márton: Nincs királyi út, Budapest 1986, Gondolat Kiadó
Szczepan Jeleński: Śladami Pitagorasa, Warszawa 1974, WSiP

en.wikipedia.org/wiki/Sudoku
hu.wikipedia.org/wiki
turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Indexes/HistoryTopics.html
www.wikipedia.pl
www.matkram.republika.pl
www.math.pl
www.mif.pg.gda.pl
www.naucz31.republika.pl/
www.math.edu.pl/liczba-zlota

The public website of the project:

http://new-twinspace.etwinning.net/web/p18606/welcome

Edited by:

Mária Fekete
Péter Pádár

Designed by:

Zisis Christoforos